北京师范大学现代数学丛书

无穷粒子马尔可夫过程引论

严士健 著

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学丛书

无穷粒子马尔可夫过程引论

严士健 著

国家自然科学基金
国家教委博士点研究基金 资助项目

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了无穷粒子马尔可夫过程的基本理论. 包括过程的存在唯一性定理及其对过程遍历性的应用；目前研究此类过程的一些常用方法——可逆性，耦合与对偶；结合这些方法讨论一些典型模型的基本性质：(1) 吉布斯 (Gibbs) 随机场与可逆测度的关系，(2)伊辛 (Ising) 模型的相变，(3)基本接触过程的临界值的存在及估计，(4)选举过程的不变概率测度的构造及遍历理论.

本书可供概率论、数学物理与统计物理专业研究生及有关专业的教师及科学技术工作者参考.

北京师范大学现代数学丛书

无穷粒子马尔可夫过程引论

严士健 著

*

北京师范大学出版社出版发行

全 国 新 华 书 店 经 销

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：9 875 字数：239 千

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月 第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7-303-00491-2/O·98

定价：(平) 6.20元 (精) 8.20元

《北京师范大学现代数学丛书》编委会

序　言

很早(1980)就想写一本关于无穷粒子马尔可夫过程的书，向我国读者介绍概率论的这一分支，几经寒暑，数易其稿，虽然未尽如意，总算和大家见面了。

无穷粒子马尔可夫过程 Gibbs 随机场以及有关的一些概率论分支(如渗流，随机介质等)是近二十年国际概率论界、数学物理学家十分关注的一些新研究领域。它们的共同特点是一方面有物理、化学、生物等方面的深刻客观背景，另一方面又以近代概率论为工具并且向它提出了挑战性的数学问题。因此引起国际上的广泛兴趣。

我注意到这个方向并对之发生兴趣是在 1977 年，当时正在考虑如何恢复已停顿了十三年之久的概率论科学研究的问题。我一方面在我校量子力学小组的讨论班上，听方福康同志介绍 I. Prigogine 关于非平衡统计物理研究的一些进展，并对一些概率模型进行了一些分析[14]；另一方面又从国外来访学者那里听到了 Dobrushin 有关 Gibbs 随机场的理论和平衡态统计物理中相变的概率论研究。当时我就萌发了一种想法：在相变的概率论研究与非平衡相变研究之间能否有某种联系与沟通。随后在 1978 年我们组织了讨论班，开始学习关于 Gibbs 随机场(态)的理论[22]。稍后于 1979 年看到了 T. M. Liggett 关于无穷粒子马尔可夫过程的综合性文章[38]，感觉到它所讨论的内容也许与上述想法和我们的基础更加接近。我们在讨论班上认真学习和讨论了这篇文章，我报告了其中的大部分。由于它写得十分简练，在集体的努力下补充了它的证明细节，并由此逐步开展了一些科学研究，特别是在

侯振挺与陈木法提出的场论的基础上，开展了速度函数的有势性与可逆性及可逆测度与 Gibbs 随机场的关系的研究。这就是本书内容的最初雏型。

随着学习的逐步深入，我觉得向我国的概率论同行特别是年青的同志介绍和推荐这一新的概率论分支是值得的和必要的。于是在 1981 学年度，结合研究生的教学，由我将上述内容加以整理由北京师大数学系油印成讲义。这份讲义在国内一些兄弟单位也使用过。本来希望在这个基础上整理出版，但是由于种种原因延搁下来了。近三年来，在北京师范大学出版社的同志以及我们小组的同志的支持与鼓励下，才得以完成。在整理的过程中，我参考了新近出版的一些专著，对讲义作了一些补充与修改。

本书的目的是向读者介绍无穷粒子马尔可夫过程的一些最基本的内容。以期读者通过本书能对它的一些基本问题和某些研究方法有所了解和掌握，为进一步学习与研究打一个基础。具体点说，第一章介绍了紧空间上无穷粒子马尔可夫过程存在唯一性定理、方法采用的是半群方法。第二章讨论了速度函数的可逆性与有势性，可逆测度与 Gibbs 随机场的一些基本问题，方法上采用了场论方法。第三章主要是介绍了基本耦合方法及其对吸引模型的遍历性的应用，还介绍了应用一种三元耦合使一般自旋模型归结为吸引的情形。第四章介绍了对偶方法及其应用。书中所介绍的各种方法落实到了几个典型模型的重要问题：(1) 伊辛模型的相变存在问题 (§3.4)。(2) 选举模型的不变概率测度集的构造及其极点的吸引场的刻划 (§4.3)。(3) 基本接触过程的临界值的存在及上、下方估计问题(§3.3，§4.4)。此外还列举了一些模型作为例子。

在本书正文之后，我还写了一个后记。一方面介绍了与无穷粒子马尔可夫过程有关的国外文献；另一方面，着重介绍了我国从 1983 年来关于无穷维反应扩散模型的研究现状及有关文献。这

些成果也许可以印证我以前的想法，即在相变的概率论研究与非平衡相变(分岔现象)之间确有联系并还有许多事情可作．希望这些介绍能引起读者的兴趣。

如前所述，本书的完成实际上是我们集体一个阶段工作的产物，其中陈木法、丁万鼎、刘秀芳、郑小谷、唐守正诸位同志自始至终参加了本书的讨论班并且在补充证明细节上都尽了努力，书中有些内容就是他们的科研成果．以后历届的无穷粒子系统方向的研究生中都对本书的初稿提出各种修改意见．在本书即将出版的时候，我向他们表示由衷的谢意．我还要衷心感谢柳藩同志在整理书稿的各方面做了很多工作．最后，我衷心感谢北京师范大学出版社在本书出版过程中对我的全力支持并且给予了多方面的帮助，没有这些，本书是不可能出版的。

由于作者水平有限，错误和不妥之处在所难免，衷心欢迎同行及读者的各种批评和建议。

严士健

1989 春节于北京师范大学

目　录

导言　问题的提出

无穷粒子马尔可夫过程是从 70 年代开始发展起来的一个新的概率论分支，它有深刻的统计物理背景．在发展过程中，又发现它与其他科学的一些问题有联系，陆续提出了一大批各种各样的模型．对概率论(特别是随机过程)提出了一系列深刻的需要解决的问题．因此受到国际上概率论学者的普遍重视，也引起其他学科的部分专家的兴趣．在这里我们将从介绍伊辛模型与接触模型出发，引出无穷粒子马尔可夫过程的概念和它的一些主要问题，希望使读者对它有一个初步的具体印象并引起兴趣．

1. 伊辛 (Ising) 模型是为了讨论铁磁体的性质 (特别是相变现象)而引入的，是统计物理中最著名的模型之一．我们先介绍它的最简单情形，即紧邻模型．

用 Z^d 表示 d 维整点 (即 d 维空间中坐标为整数的点)全体组成的集．设想有一个粒子系统，它在每一整点 $u\in Z^d$ 上有一粒子，每个粒子有两个可能的状态——正自旋与负自旋——分别用 $+1$ 与 -1 表示．对于任意两个位置 $u,v\in Z^d$ 上的粒子，有一个交互作用强度

$$(1.1)\qquad J(u,\ v)=\begin{cases}1, & |u-v|=1,\\ 0, & |u-v|\neq 1,\end{cases}$$

其中 $|u|,u\in Z^d$，表示向量 u 的欧几里得长度，即若 $u=(u_1,\cdots,u_d)$，则

$$|u|=\left[\sum_{i=1}^{d}u_i^2\right]^{1/2}.$$

条件(1.1)便是紧邻性，即只有相邻的粒子才有交互作用。这便是 d 维铁磁体(紧邻)**伊辛模型**.

我们用 $\xi(u)$ (或 ξ_u)，$u\in Z^d$，表示位于 u 处的粒子的状态〔当然 $\xi(u)=1$ 或 -1)，那么集 $\xi=\{\xi(u): u\in Z^d\}$ 自然就表示整个粒子系统的一个状态，按照物理的习惯称之为组态．考虑系统随时间发展的演化过程．记系统在时刻 $t\in[0,\infty)$ 的组态为 $\xi_t=\{\xi_t(u): u\in Z^d\}$，问对任何 $\beta>0$，是否有一马尔可夫过程使对任何 u，$v\in Z^d$，$u\neq v$，及任何初始组态 $\xi=\{\xi(u): u\in Z^d\}$ 满足：当 $t\to 0$ 时有

$$
(1.2)\quad \begin{aligned} &P_\xi(\xi_t(u)\neq\xi(u))=\Big(\exp\Big\{-\beta\sum_{v:|v-u|=1}\xi(u)\xi(v)\Big\}\Big)t+o(t),\\ &P_\xi(\xi_t(u)\neq\xi(u),\xi_t(v)\neq\xi(v))=o(t). \end{aligned}
$$

易见这个过程是与 β 有关的．(1.2) 的含意是在 $t=0$ 这一瞬间，$u\in Z^d$ 的粒子的状态改变的概率速率是

$$
\exp\Big\{-\beta\sum_{v:|v-u|=1}\xi(u)\xi(v)\Big\},
$$

两个粒子同时改变状态的概率速率是 0．这个过程称之为具参数 β 的 d 维**紧邻伊辛过程**.

可以证明 d 维紧邻伊辛过程总是存在的．并且当 $d=1$ 时，对任何 $\beta>0$，它的不变测度(即平稳分布)是唯一的；当 $d\geqslant 2$ 时存在 $\beta_c^{(d)}\in(0,\infty)$ 使当 $\beta<\beta_c^{(d)}$ 时不变测度唯一，当 $\beta>\beta_c^{(d)}$ 时不变测度不唯一．用统计物理的术语来说就是：当 $d=1$ 时紧邻伊辛模型没有**相变**，当 $d\geqslant 2$ 时紧邻伊辛模型有相变，$\beta_c^{(d)}$ 称为**临界点**．对 $d=2$，还算出了

$$
\beta_c^{(2)}=2^{-1}\operatorname{arcsin}h(1)\approx 0.44.
$$

当 $\beta>\beta_c^{(2)}$ 时它的任何不变测度都是两个给定的不变测度 μ^+,μ^- 的凸组合 $\alpha\mu^++(1-\alpha)\mu^-$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$．至于 $d\geqslant 3$ 的情形，除了 $\beta_c^{(d)}$ 的存在及 $\beta_c^{(3)}\leqslant\beta_c^{(2)}$ 外，几乎一无所知[44, §1, $Ex3$]．这是一个至今没有解决的对统计物理及无穷粒子马尔可夫过程都重

要的著名问题.

2. 伊辛模型是平衡态统计物理的一个重要模型，下面我们介绍的基本接触模型则是非平衡系统的一个简单的重要模型．设想粒子系统在每一整点 $u\in Z^d$ 上有一个粒子，每个粒子有两个可能状态 0,1. 我们可以将它们分别理解为"健康"和病态"两种状态．用 $\eta(u)$（或 η_u），$u\in Z^d$ 表示 u 处的粒子的状态，于是 $\eta(u)=0$ 或 1，那么集 $\eta=\{\eta(u):u\in Z^d\}$ 表示整个粒子系统的组态．考虑系统随时间发展的演化过程．设 $\lambda>0$ 为一任意给定的常数，系统在 $t=0$ 的组态为 η，它在 $t=0$ 的瞬间，u 处粒子的状变的概率速率为

$$
(2.1)\qquad c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1,\\ \lambda\sum\limits_{v:|v-u|=1}\eta(v), & \eta(u)=0.\end{cases}
$$

按照上面的理解，这可以解释如下：$u\in Z^d$ 的粒子，如果原来处于病态，那么经过治疗成为健康的概率速率是 1；如果原来是健康的，那么它受紧邻的病态粒子的传染可能成为病态的，而被传染的概率速率是 $\lambda\sum\limits_{v:|v-u|=1}\eta(v)$（即与它紧邻的病态粒子数成比例，比例常数是 λ）．按这种解释，可以认为它是一个大大简化了的模型，通常称它为（d 维）**基本接触模型**（或传染病模型）．现在要问满足上述要求的随时间演化的过程存在吗？ 即记系统在时刻 $t\in[0,\infty)$ 的组态为 $\eta_t=\{\eta_t(u):\ u\in Z^d\}$，问是否有一个马尔可夫过程 P_η，$\eta=\{\eta(u):u\in Z^d\}$，使对任何 $u,\ v\in Z^d, u\neq v$ 及任何初始组态 $\eta_0=\eta$ 满足：当 $t\to 0$ 时有

$$
(2.2)\qquad \begin{aligned}&P_\eta(\eta_t(u)\neq\eta(u))=c(u,\eta)t+o(t),\\ &P_\eta(\eta_t(u)\neq\eta(u),\eta_t(v)\neq\eta(v))=o(t).\end{aligned}
$$

这个马尔可夫过程叫做具参数 λ 的 d 维**基本接触过程**.

我们将在以后证明：对任何 $\lambda>0$，基本接触过程总是存在

的．现在对它作一点直观考查．当

$$\lambda < \frac{1}{2d}$$

时，

$$\lambda \sum_{v:|v-u|=1} \eta(v) < \frac{1}{2d} \cdot 2d = 1,$$

由关于(2.1)的解释，在每一 $u \in Z^d$ 处病态粒子被治好的概率速率要比健康粒子被传染成病态的速率要快，由此可以想像：不管过程从什么组态出发，当 $t \to \infty$ 时，系统的一切粒子终究会成为健康的，即系统的概率分布"最后"集中在组态 $\{\theta_u: u \in Z^d\}$，$\theta_u = 0$．而这个概率分布按(2.1)的解释是过程的不变测度．以后将证明：存在 $\lambda_c^{(d)} \in (0,\infty)$使当 $\lambda < \lambda_c^{(d)}$ 时，不变测度唯一；当 $\lambda > \lambda_c^{(d)}$ 时，不变测度不唯一．而且

$$(2d-1)^{-1} \leqslant \lambda_c^{(d)} \leqslant \frac{d}{2}. \tag{2.3}$$

至于 $\lambda_c^{(d)} = ?$ 则是一个没有解决的有兴趣的问题． 由于基本接触过程是一个简单的典型的非平衡系统，所以算出 λ_c^{d} 或更精确估计 $\lambda_c^{(d)}$ 是有意义的．

3. 从上面两个例子很容易归纳出一类无穷粒子马尔可夫过程——自旋变相过程的概念．

设 S 为一可数集，它表示给定的无穷粒子系统所能占据的"位置"的集．每一位置 $u \in S$ 具有两个状态：0，1．系统的全体组态集

$$X \triangleq \{\eta: \eta \triangleq \{\eta(u): u \in S\},\ \eta(u) = 0 \text{ 或 } 1,\ u \in S\}.$$

在系统的组态为 η 时，位置 $u \in S$ 上的状态改变的概率速率为 $c(u, \eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$． 用 η_t（或 $\eta(t)$）表示系统在时刻 $t \in [0,\infty)$ 的组态． 以 X 为组态空间的马尔可夫过程 $\{P_\eta: \eta \in X\}$，如果对任何 $u, v \in S$，$u \neq v$，$\eta \in X$，(2.2) 成立，那么就称为这个过程为

以 $c(u,\eta)$ 为**速度函数**的**自旋变相过程**．当 $S=Z^d$，D 为 Z^d 的给定有限子集且

$$(3.1)\quad c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1, \quad \lambda>0\ \text{为常数},\\ \lambda\sum_{v\in D}\eta(u+v), & \eta(u)=0, \quad u\in Z^d,\ \eta\in X\end{cases}$$

时，相应的自旋变相过程就称为(具有参数 λ 的 d 维)**接触过程**．当 $D=\{v:v\in Z^d,|v|=1\}$ 时，即为**基本接触过程**．

设 Φ 是定义在 S 的有限非空子集类上的实值函数且满足

$$\sum_{v\in A}|\Phi(A)|<\infty, \qquad \text{对任何}\ v\in S,$$

定义速度函数

$$(3.2)\quad c(u,\ \eta)\triangleq\exp\Big\{-\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\cdot\prod_{v\in A}(2\eta(v)-1)\Big\}, u\in S,\ \eta\in X.$$

其中 $\beta>0$，和式中的 A 遍历 $\ni u$ 的 S 的有限子集．则与此速度函数相应的自旋变相过程称为(具参数 β 的)**伊辛过程**，Φ 称为伊辛模型的**交互作用势**．在统计物理中，通常是 $S=Z^d$ 且讨论**对势**的情形，即当 $|A|\geqslant 3$ 时，$\Phi(A)=0$．有时还假定**平移不变性**，即 $\Phi(\{u,v\})=\Phi(\{u-v,0\}),u\neq v,\Phi(\{u\})=\Phi(\{0\})$．若平移不变对势还满足**紧邻性**：

$$(3.3)\quad \Phi(\{0,\ u\})=\begin{cases}1, & |u|=1,\\ 0, & |u|\neq 1.\end{cases}$$

则称此势为**紧邻的**．当 (3.2) 中的 Φ 为紧邻势时相应的伊辛过程就是**紧邻伊辛过程**．注意那里的 $\xi(u)$ 是此处的 $2\eta(u)-1$．

自旋变相过程的例子是丰富多采的，我们暂时介绍到此．

4. 我们再介绍一类无穷粒子马尔可夫过程——排它过程．S,X 的意义和第 3 目一样，但是现在系统的特性由两个位置

$u,v\in S$ 上的状态交换的概率速率 $c(u,v,\eta)$，$u,v\in S$，$\eta\in X$（当 $\eta(u)=\eta(v)$ 时，$c(u,v,\eta)=0$）给出。用 η_t（或 $\eta(t)$）表示无穷粒子系统在时刻 $t\in[0,\ \infty)$ 的组态。一个以 X 为状态空间的马尔可夫过程 $\{P_\eta:\eta\in X\}$ 如果满足条件：对任何三个不同的 u，$v,w\in S$ 及任何 $\eta\in X$，$\eta(u)\neq\eta(v)$，当 $t\to 0$ 时有

$$
(4.1)\quad \begin{aligned} &P_\eta(\eta_t(u)=\eta(v),\ \eta_t(v)=\eta(u))=c(u,v,\eta)t+o(t),\\ &P_\eta(\eta_t(u)=\eta(v),\eta_t(v)=\eta(u),\eta_t(\omega)\neq\eta(w))=o(t), \end{aligned}
$$

则称此过程为具有速度函数 $c(u,v,\eta)$ 的**排它过程**或**粒子运动过程**.

排它过程有一种直观解释如下：设想 $\eta(u)=0$，$\eta(u)=1$ 分别表示在 u 处没有粒子和有一粒子两种情况，于是 $\eta(u)\neq\eta(v)$ 就表示在 u，v 两处有一处有粒子而另一处没有粒子. 不妨设 $\eta(u)=1$，因而 $\eta(v)=0$，(4.1) 的第一式就表示系统的组态为 η 时 u 处粒子移至 v 处的概率速率为 $c(u,v,\eta)$，而第二式表示再有一个位置的粒子移动的概率速率就是零. 对 $\eta(u)=0$，$\eta(v)=1$ 的情形可作同样的解释. 这种解释的一个具体例子就是**格气模型**,它限制气体的分子只能在 S 的元上(当然这是一种简化了的情形)但不一定每一 $u\in S$ 上都有气体分子. 在格气模型中,速度函数

$$
(4.2)\quad c(u,v,\eta)=\begin{cases}\eta(u)c(u,\eta)p(u,v)+\eta(v)c(v,\eta)p(v,u), & \\ \qquad\qquad \eta(u)\neq\eta(v), & \\ 0,\quad \eta(u)=\eta(v),\quad u,v\in S,\quad \eta\in X,\end{cases}
$$

其中 $p(u,v)\geqslant 0$，$p(u,u)=0$.

排它过程也可以有另外一种解释如下：设想系统由两种粒子组成，而且在每一 $u\in S$ 处有一粒子. 状态 0,1 分别表示这两种粒子中的一种. 那么 $c(u,v,\eta)$，$\eta(u)\neq\eta(v)$，就表示 u,v 两处的粒子不同，它们交换位置的概率速率. 这种解释的一个具体例子就是合金模型. 由于它的速度函数比较复杂，我们留待以后再

介绍.

5. 从数学上看无穷粒子马尔可夫过程，首先要讨论的是存在问题．实际上最重要的恐怕是遍历性问题，它源于统计物理．这里包括不变测度集的构造问题和吸引场问题．对自旋变相过程来说，有不少系统是与一些参数有关的（例如伊辛过程中的 β，接触过程中的 λ）．某些这种过程会出现如下的情况：在参数取某些值时，不变测度唯一；而对参数的某些值，不变测度不唯一（伊辛过程和接触过程就是这样）．如果出现这种情况，我们就称过程有相变．讨论过程有无相变通常是一个有兴趣的问题．在有相变的情况下确切求出不变测度唯一与不唯一的参数域，求出不变测度集的构造（二维紧邻伊辛过程解决了这个问题）等等问题常常是困难而有兴趣的．对排它过程来说，不变测度是不唯一的，找出它的一切不变测度是一个有兴趣的问题．此外，与不变测度集构造有关的是对于平衡系统来说，有一部份不变测度称为 Gibbs 态（测度），它是由统计物理引伸出来的．它通常与过程的可逆测度紧密相关．讨论 Gibbs 态、可逆测度与不变测度三者之间的关系是另一类有兴趣的问题．

吸引场问题是对过程的给定不变测度，寻求使过程的绝对分布（即 η_t 的概率分布）当 $t\to\infty$ 时弱收敛于此给定不变测度的一切初始分布．特别当自旋变相过程的不变测度唯一时，人们自然希望讨论：是否对任何初始分布，过程的绝对分布当 $t\to\infty$ 时都弱收敛于它的问题（即过程是遍历）．

6. 自旋变相过程与排它过程只是两种特殊的无穷粒子马尔可夫过程，它们是在位置集可数且每个位置的状态只有两个的情况下，在瞬间只有一个位置的状态改变（自旋变相）或两个位置状态交换（排它过程）的模型，甚至两个位置的状态具有其它改变形式的情形都没有涉及．当然可以考虑多个位置同时改变状态的模型，还可以进一步设想每个位置的状态不只两个，而是有限个甚至

是可数个等等更一般的情形，S 也可以不是可数集，而是更一般的集，例如 d 维实空间 R^d 等等．这些模型近来都有一些讨论．

7. 在本书中，我们主要讨论自旋变相过程和排它过程，其他无穷粒子马尔可夫过程在有关章节作些介绍．对于前两种过程也只讨论其中某些问题，结合问题介绍一些方法和技巧、若干动态及文献．作为有兴趣了解这一新分支的读者的一个导引，有志于在这个方向上深造的读者可以从有关专著及文献找到进一步学习的材料和研究问题．

第一章　存在性定理

这一章讨论无穷粒子马尔可夫过程的存在性．解决这个问题的途径可以应用半群理论，也可以应在耦合技巧由有穷粒子系统过渡到无穷粒子系统， 还可以应用鞅方法．本章采取半群方法．§1 先介绍要用到的有关半群的经典理论；§2 叙述一条无穷粒子系统马尔可夫过程一般的存在定理，并将应用于自旋变相过程、排它过程等具体情形；§3 证明 §2 中所述的一般定理；§4 讨论 §2 的存在定理对无穷粒子马尔可夫过程遍历性的应用，对一些具体例子进行了计算．

§1　半群理论中若干一般性结果

本节介绍若干在证明无穷粒子马尔可夫过程存在定理时要用到的半群理论的一般结果．有些常见的经典结果直接列出并指出参考资料．有些不太常见的则叙述结果并加以证明．

1. 定理　设W是一 Banach 空间(以后简称 B- 空间)，Ω 为 W中的线性算子，则Ω是**W上连续压缩半群** $\{S(t):t\geqslant 0\}$ (即 $S(0)$ 为W上的单位算子；$\forall s,t\geqslant 0, S(t+s)=S(t)S(s)$；$\forall f\in W$，$\|S(t)f\|\leqslant\|f\|$，$\|\cdot\|$ 表W的范数；当 $t\to 0$ 时 $\|S(t)f-f\|\to 0$，$\forall f\in W$，成立)的无穷小母元的充要条件是

(1.1)　　　　Ω 的定义域 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在W中稠；

(1.2) $\forall\lambda>0$ 充分小，$\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=W$，其中 $\mathscr{R}(\cdot)$ 表相应

算子的值域；

(1.3) $\forall\lambda \geqslant 0, \forall f \in \mathscr{D}(\Omega), \|f\| \leqslant \|f - \lambda\Omega f\|$.

进一步，满足(1.1)—(1.3)的算子Ω与它生成的半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 之间有下列一一对应关系：

(1.4) $\forall f \in W,\ \forall t \geqslant 0,\quad S(t)f = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}\Omega\right)^{-n} f;$

(1.5) $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega),\quad \Omega f = \lim_{t\to 0}[S(t)f - f]/t;$

并且还有

(1.6) $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega),\quad \dfrac{d[S(t)f]}{dt} = \Omega S(t)f = S(t)\Omega f.$

证. 定理的前一部分由 [1，§ 4.4 定理 1] 及下面的引理 3 得出. (1.5)，(1.6) 见 [1，§ 4.3 引理 2]. (1.4) 见 [7，IX，§ 12 引理].

2. 定理 设X为紧距离空间，Ω为 $C_b(X)$ (X 上一切实值有界连续函数作成的 B- 空间，范数为 $\|f\| \triangleq \sup_{x\in X}|f(x)|, f \in C_b(X)$)上的线性算子，为要存在一个随机连续 Feller 函数(见 [1，§ 4.2 定义 4]) $p(t,x,A)$，$t \geqslant 0$，$x \in X$，$A \in \mathscr{B}(X)$ (X 的 Berel σ- 域)使得由

$$S(t)f \triangleq \int_X p(t,\cdot,dy)f(y),\quad f \in C_b(X),\quad t \geqslant 0$$

定义的连续压缩半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的无穷小母元为Ω的充分与必要条件是

(2.1) Ω的定义域 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $C_b(X)$ 中稠；

(2.2) $\forall\lambda > 0$ 充分小，$\mathscr{R}(I - \lambda\Omega) = C_b(X)$；

(2.3) $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$，$\lambda \geqslant 0$，

$$\min\{f(x): x \in X\} \geqslant \min\{f(x) - \lambda\Omega f(x): x \in X\},$$

(因X是紧距离空间，$f \in C_b(X)$ 达到最小值，记号合理)；

(2.4) 恒取 1 为值的常值函数 $\mathbf{1} \in \mathscr{D}(\Omega)$，$\Omega\mathbf{1} = 0$.

在此条件下，Feller 函数是唯一决定的。

证. 定理的前一部分由下面的引理 3 并将 [1, § 4.4 定理 2] 的证明作如下的注释即可。

[1,§ 4.4 定理 2]得到的必要条件是 (2.1),(2.2),(2.4) 及 (2.5) $\forall f\in\mathscr{D}(\Omega)$, 若 $f(x_0)=\max\{f(x):x\in X\}$, 则 $\Omega f(x_0)\leq 0$. 将 f 换成 $-f$ 即得：若 $f(x)=\min\{f(x):x\in X\}$,则 $\Omega f(x)\geqslant 0$. 于是有

$$
\begin{aligned}
\min\{f(x):x\in X\}&=f(x)\geqslant f(x)-\lambda\Omega f(x)\\
&\geqslant\min\{f(x)-\lambda\Omega f(x):x\in X\},
\end{aligned}
$$

此即 (2.3). 至于充分性的证明. 该定理的证明中实际上证明了 (2.3)推出(1.3)(即该处的(31)推出该书 § 4.4 引理 1 的 3°), 然后应用下面的引理 3 可将该定理的条件 $b(\forall g\in C_b(X),\exists f\in\mathscr{D}(\Omega),\lambda f-\Omega f=g(\lambda>0))$ 中的 $(\lambda>0)$ 换成 "$\forall\lambda>0$ 充分小"即得定理的前一部分.

定理的后一部分为[1,§ 4.3 定理 9]

3. 引理 定理 1 中的条件组 (1.1), (1.2), (1.3) 与条件组 (1.1),(1.3)

$$
(1.2)' \qquad \forall\lambda>0,\qquad \mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=W
$$

等价.

证. (i) (1.1),(1.2)′,(1.3) $\Longrightarrow$ (1.1),(1.2),(1.3) 显然. 今往证反过来也对. 这只要证明：若 $0<\lambda<\gamma$, 则

$$
\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=W\Longrightarrow\mathscr{R}(I-\gamma\Omega)=W.
$$

设 $g\in W$, 则由 $\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=W$ 及(1.3)知 $(I-\lambda\Omega)^{-1}g$ 及 $(I-\lambda\Omega)^{-1}h$, $\forall h\in W$, 是合理定义的, 因而可以如下地定义映射T: $W\to\mathscr{D}(\Omega)$:

$$
(3.1)\qquad Th\triangleq\frac{\lambda}{\gamma}(I-\lambda\Omega)^{-1}g
$$

$$+\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}(I-\lambda\Omega)^{-1}h, h\in W.$$

由(1.3)知

(3.2) $$\|Th_1-Th_2\|\leqslant\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\|(I-\lambda\Omega)^{-1}(h_1-h_2)\|$$

$$\leqslant\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\|h_1-h_2\|, h_1,h_2\in W.$$

若能证明：有一唯一的 $f\in W$ 存在使

(3.3) $$Tf=f,\quad 因而\ f\in\mathscr{D}(\Omega),$$

则由(3.1)得

$$(I-\lambda\Omega)f=\frac{\lambda}{\gamma}g+\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}f,$$

从而 $f-\gamma\Omega f=g$。这就证明：$\mathscr{R}(I-\gamma\Omega)=W$。

(ii) 今往证：(3.2) $\Longrightarrow\exists f\in W$ 使(3.3)成立，而且 f 唯一(这实际是压缩映射原理)。

令

(3.4) $f_0\triangleq 0$（零函数），$f_{n+1}\triangleq Tf_n$，$n=0,1,2,\cdots$

则 $\forall m,n\geqslant 1$，由 (3.2) 知

(3.5) $$\|f_{n+m}-f_n\|\leqslant\left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\right)^n\|f_m-f_0\|$$

$$=\left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\right)^n\|f_m\|,$$

再由(3.5)、(3.1)及(1.3)知

$$\|f_m\|\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\|f_{k+1}-f_k\|\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\right)^k\|Tf_0\|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\right)^k\frac{\lambda}{\gamma}\|(I-\lambda\Omega)^{-1}g\|$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\right)^k\frac{\lambda}{\gamma}\|g\|=\|g\|.$$

从而由(3.5)，$\{f_n\}$ 为W中的基本列，故 $\exists f\in W$ 使 $f_n\to f$. 由(3.2)知 $Tf_n\to Tf$. 故由 $f_{n+1}=Tf_n$ 得知 $\exists f\in W$ 使(3.3)成立.

若有 $f_1,f_2\in W$ 使 $Tf_i=f_i$, $i=1,2$. 则由(3.2)得

$$\|f_1-f_2\|\leqslant\frac{\gamma-\lambda}{\gamma}\|f_1-f_2\|,$$

由此即知

$$f_1=f_2.$$

4. 定义 设T为B-空间W上的算子,则

$$G(T)=\{(f,Tf):f\in\mathscr{D}(T)\}$$

称为T**的图**,在 $W\times W$ 上定义运算及范数如下:

$$(4.1)\quad \begin{aligned}&(f_1,g_1)+(f_2,g_2)\triangleq(f_1+f_2,g_1+g_2),\\&\alpha(f,g)=(\alpha f,\alpha g),\quad f_i,g_i,f,g\in W,\ \alpha\in(-\infty,\infty)\end{aligned}$$

$$(4.2)\quad \|(f,g)\|\triangleq\|f\|+\|g\|,\quad f,g\in W.$$

若 $G(T)$ 是$W\times W$中的闭集,则称T为**闭算子**. 若S,T 都是W上的算子且 $G(S)\subset G(T)$ (即 $\mathscr{D}(S)\subset\mathscr{D}(T)$, 且 $\forall f\in\mathscr{D}(S)$, 有 $Sf=Tf$), 则称T为S的一个**扩张**; 称S为T在 $\mathscr{D}(S)$ 上的**限制**(或压缩). 今后记算子T在$D(\subset\mathscr{D}(T))$上的限制为 $T|_D$. 若T有一闭算子为其扩张,则称T为**可闭的**,若有一算子 $\bar{T}$ 使 $G(\bar{T})=\overline{G(T)}$($G(T)$ 在$W\times W$中的闭包), 则称 $\bar{T}$ 为T的**闭包**, 今后恒记算子T的闭包为 $\bar{T}$. 显然 $\bar{T}$ 为闭算子,在T可闭时,对T的任一闭扩张 $\tilde{T}$ 来说, $G(\bar{T})\subset G(\tilde{T})$. 此外还易看出:

(4.3) $\begin{cases}T\text{ 为}W\text{上的闭算子当且仅当: 若 }\forall\{f_n\}\subset\mathscr{D}(T),\\ f_n\to f,\ Tf_n\text{ 收敛,则 }f\in\mathscr{D}(T)\text{ 且 }Tf=\lim\limits_{n\to\infty}Tf_n.\end{cases}$

(4.4) $\begin{cases}T\text{ 可闭当且仅当: 若 }\forall\{f_n\}\subset\mathscr{D}(T),\ f_n\to 0,\text{ 有}\\ Tf_n\text{ 收敛,则}\lim\limits_{n\to\infty}Tf_n=0.\end{cases}$

5. 定理 设$\Omega,\Omega_n,n\geqslant 0$, 分别是$W$上连续压缩半群 $\{S(t)$:

$t \geqslant 0\}$，$\{S_n(t): t \geqslant 0\}$ 的无穷小母元，D是W的稠子集，

$$D \subset \mathscr{D}(\Omega_n), n \geqslant 0, \text{ 且 } \Omega = \overline{\Omega|_D}.$$

若 $\forall f \in D$ 有 $\Omega_n f \to \Omega f$，则 $\forall f \in W$，有

(5.1) $\quad \forall t_0 \in [0, \infty), \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t)f - S(t)f\| \to 0 \quad (n \to \infty).$

证. (i) 先证：在定理的假设下，$\forall \lambda > 0$ 有

(5.2) $\quad \forall f \in W, \quad (\lambda I - \Omega_n)^{-1} f \to (\lambda I - \Omega)^{-1} f.$

首先注意由定理 1 知 $\forall \lambda > 0$，$(\lambda I - \Omega_n)^{-1}, (\lambda I - \Omega)^{-1}$ 存在且由(1.3)知有

(5.3) $\quad \|(\lambda I - \Omega_n)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}, \|(\lambda I - \Omega)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}.$

任取 $f \in (\lambda I - \Omega)D$，则存在 $g \in D \subset \mathscr{D}(\Omega_n)$ 使 $f = (\lambda I - \Omega)g$，且当 $n \to \infty$ 时有

(5.4)
$$\begin{aligned} \|(\lambda I - \Omega_n)^{-1} f - (\lambda I - \Omega)^{-1} f\| &= \|(\lambda I - \Omega_n)^{-1} f - g\| \\ &= \|(\lambda I - \Omega_n)^{-1}(\Omega_n - \Omega)g\| \leqslant \lambda^{-1}\|(\Omega_n - \Omega)g\| \\ &\to 0. \end{aligned}$$

于是若能证明 $(\lambda I - \Omega)D$ 在W中稠，则由 (5.4)，(5.3)易知(5.2)成立.

为了证明 $(\lambda I - \Omega)D$ 在W中稠，任取 $g \in W$，由(1.2)及引理 3 知 $\exists f \in \mathscr{D}(\Omega)$ 使 $(\lambda I - \Omega)f = g$. 又由 $\Omega = \overline{\Omega|_D}$ 知

$$\begin{aligned} \{(f, \Omega f): f \in \mathscr{D}(\Omega)\} &= G(\Omega) = \overline{G(\Omega|_D)} \\ &= \overline{\{(f, \Omega f): f \in D\}}, \end{aligned}$$

于是 $\exists \{f_n\} \subset D$ 使 $f_n \to f, \Omega f_n \to \Omega f$. 因而

$$g_n \triangleq (\lambda I - \Omega) f_n \to (\lambda I - \Omega) f = g, \quad n \to \infty,$$

且 $g_n \in (\lambda I - \Omega)D$. 故 $(\lambda I - \Omega)D$ 在W中稠，从而(5.2)成立.

(ii) 由[1, § 4.3 定理 2 或本章习题 4]知(5.2)等价于当 $n \to \infty$ 时，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_n(t) f dt \to \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f dt, \quad f \in W, \lambda \geqslant 0.$$

由 $S_n(t), S(t)$ 的压缩性及函数集

$$L_1^{(0)} \triangleq \left\{ h : h(t) \triangleq \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\lambda_k t}, a_k \in (-\infty, \infty), \right.$$

$$\left. \lambda_k > 0, N \geqslant 1, t \in [0, \infty) \right\}$$

在 $L_1([0,\infty))$ 中稠知：当 $n \to \infty$ 时，$\forall f \in W$，有

(5.5) $\forall h \in L_1([0,\infty))$，$\int_0^\infty h(t) S_n(t) f dt \to \int_0^\infty h(t) S(t) f dt$*)

成立．令

(5.6) $\mathscr{D} \triangleq \{f : f \triangleq \int_0^\infty h(t) S(t) g dt,\ g \in W,\ h \in L_1([0,\infty))\}$，

则 $\mathscr{D}$ 在W中稠．事实上，由[1，§ 4.3 定理 2 或本章习题 4] 知

$$(\lambda I - \Omega)^{-1} g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) g dt \in \mathscr{D},\ g \in W,\ \lambda > 0,$$

从而 $\mathscr{D}(\Omega) = \mathscr{D}(\lambda I - \Omega) \subset \mathscr{D}$，再由 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在W中稠知 $\mathscr{D}$ 在W中稠．

(iii) 今往证：$\forall f \in \mathscr{D}$，(5.1) 成立．

由 $\mathscr{D}$ 的定义(5.6)知 $\exists g \in W$，$h \in L_1([0,\infty))$ 使

$$f = \int_0^\infty h(t) S(t) g dt. \tag{5.7}$$

令

$$f_n \triangleq \int_0^\infty h(t) S_n(t) g dt, \tag{5.8}$$

则由(5.5)知

$$\|S_n(t) f - S_n(t) f_n\| \leqslant \|f - f_n\| \to 0, (n \to \infty)$$

对 $t \in [0,\infty)$ 一致成立．所以要证(5.1)只需证：

(5.9) $\forall t_0 \in [0,\infty)$，$\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t) f_n - S(t) f\| \to 0$，$(n \to \infty)$．

由半群性及(5.7)知

*) 此处及以下的积分都是 Bochner 意义的，关于 Bochner 积分见 [7．V．§5]

$$S(t)f = \int_0^\infty h(s)S(t+s)g\,ds = \int_t^\infty h(s-t)S(s)g\,ds,$$

同样地应用(5.8),对 $S_n(t)f_n$ 也有类似的等式,因而令

(5.10) $$h_t: h_t(s) \triangleq \begin{cases} 0, & s < t, \\ h(s-t), & s \geq t, \end{cases}$$

则 $\forall t \in [0,\infty)$, $h_t \in L_1([0,\infty))$ 且

(5.11) $$S(t)f = \int_0^\infty h_t(s)S(s)g\,ds, \quad S_n(t)f_n = \int_0^\infty h_t(s)S_n(s)g\,ds$$

下面我们证明: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in [0, \infty)$, $\exists N_t \geq 1$ 及 $\delta_t > 0$ 使当 $n \geq N_t$ 时有

(5.12) $$\forall t' \in (t-\delta_t, t+\delta_t) \cap [0,\infty),$$
$$\|S_n(t')f_n - S(t')f\| < \varepsilon.$$

事实上,由(5.11)、(5.5)及 $h_t \in L_1([0,\infty))$ 知 $\exists N_t \geq 1$ 使当 $n \geq N_t$ 时,

(5.13) $$\|S_n(t)f_n - S(t)f\|$$
$$= \left\|\int_0^\infty h_t(s)S_n(s)g\,ds - \int_0^\infty h_t(s)S(s)g\,ds\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

再由 h_t 的定义(5.10)知当 $t' \to t$ 时,

$$\int_0^\infty |h_{t'}(s) - h_t(s)|\,ds = \int_0^{|t-t'|} |h(s)|\,ds$$
$$+ \int_0^\infty |h(s) - h(s + |t'-t|)|\,ds \to 0.$$

于是 $\exists \delta_t > 0$ 使当 $t' \in (t-\delta_t, t+\delta_t) \cap R_+$ 时,

(5.14) $$\|S_n(t')f_n - S_n(t)f_n\|$$
$$\overset{(5.11)}{\leq} \int_0^\infty |h_{t'}(s) - h_t(s)|\,ds \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(5.15) $$\|S(t')f - S(t)f\|$$

$$\overset{(5.11)}{\le} \int_0^{\infty} |h_{t'}(s) - h_t(s)| ds \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由(5.13),(5.14),(5.15)即知当 $n \geqslant N_t$ 时(5.12)成立.

现在来证明 (5.9): $\forall t_0 \in [0,\infty)$,任取 $\varepsilon > 0$, 则由(5.12)知 $\forall t \in [0, t_0]$, $\exists N_t \geqslant 1$ 及 $\delta_t > 0$ 使(5.12)成立. 由于 $(t - \delta_t, t + \delta_t)$, $t \in [0, t_0]$ 复盖 $[0, t_0]$, 所以由有限复盖定理知存在有限个 t_k 及 $\delta_k \triangleq \delta_{t_k} > 0$, $k = 1,2,\cdots,K$ 使

$$\bigcup_{k=1}^{K} (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k) \supset [0, t_0].$$

令 $N \triangleq \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K} N_{t_k}$, 则由(5.12)知当 $n \geqslant N$ 时,

$$\|S_n(t)f_n - S(t)f\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

这就证明了(5.9). 因而 $\forall f \in \mathscr{D}$, (5.1) 成立.

(iv) 最后证明: $\forall f \in W$, (5.1) 成立.

事实上,由于 $\mathscr{D}$ 在W中稠, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in \mathscr{D}$使

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是由 (iii) 知 $\forall t_0 \in [0,\infty)$,$\exists N \geqslant 1$ 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t)f - S(t)f\| \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t)(f - g)\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t)g - S(t)g\| \\ &\qquad + \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S(t)(g - f)\| \\ &\leqslant 2\|f - g\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|S_n(t)g - S(t)g\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

即(5.1)成立. □

6. 注 由定理5的证明(iii)的最后一段可以看出, (5.1)可以加强为

(6.1) $\forall K \subset R_+$ 紧集, $\sup\limits_{t \in K} \|S_n(t)f - S(t)f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

§2 存在定理的陈述

本节将叙述关于无穷粒子系统马尔可夫过程存在的一条相当一般的定理，然后说明它对自旋变相过程、排它过程及其它过程存在性的应用．至于这条一般定理的证明留待下节去完成．

1. 记号与有关预备知识．除特别声明外，S 表一可数集，$\mathscr{S}$ 表 S 的一切有限子集组成的集(集类)．

$\forall u\in S$，Y_u 表元数多于 1 的紧距离空间，其距离记作 ρ_u，当 Y_u 是有限集时，则赋予散拓扑，距离 ρ_u 定义为

$$\rho_u(y,\bar{y})=\begin{cases}1, & y\neq\bar{y},\\ 0, & y=\bar{y},\end{cases}\quad y,\bar{y}\in Y_u.$$

$\forall\Lambda\subset S$，令 $X(\Lambda)\triangleq\prod_{u\in\Lambda}Y_u$ (即 Y_u，$u\in\Lambda$，的乘积集)，记 $X=X(S)$．当所有 Y_u 都与 Y 相同时，记 $X\triangleq Y^S$，$X(\Lambda)=Y^\Lambda$．X 赋乘积拓扑，因而 X 为紧距离空间，其距离 ρ 可以如下给出：对 S 给一编号 $S=\{u_1,u_2,\cdots\}$ 在 X 上定义

$$(1.1)\qquad \rho(\bar{\eta},\eta)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\rho_n(\bar{\eta}(u_n),\eta(u_n))\wedge 1\right],$$

其中 $\eta=\{\eta(u):u\in S\}\in X$，$\bar{\eta}=\{\bar{\eta}(u):u\in S\}$，$\eta(u),\bar{\eta}(u)\in Y_u$，$\rho_n=\rho_{u_n}$ [附录推论 1.3]．

$C_b(X)$ 表示 X 上一切实有界连续函数作成的 B-空间．范数定义为 $\|f\|\triangleq\sup\{|f(\eta)|:\eta\in X\}$，$f\in C_b(X)$．由于 X 是紧距离空间，$C_b(X)$ 与 X 上一切实连续函数集 $C(X)$ 相同，且 $\forall f\in C_b(X)$，f 必定一致连续且在 X 上达到最大值与最小值．(以上有关拓扑的结论在附录 A 中都有明确的叙述和证明)．

$\forall u\in S$，$\mathscr{F}_u$ 表 Y_u 的 Borel σ-域(当 Y_u 有限时即为 Y_u 的

一切子集作成的 σ- 域), $\forall \Lambda \subset S, \mathscr{F}_0(\Lambda) \triangleq \prod_{u \in \Lambda} \mathscr{F}_u$ 表 $\mathscr{F}_u$, $u \in \Lambda$, 的乘积 σ- 域，也就是 $X(\Lambda)$ 的 Borel σ- 域. [附录引理 1.5(iii)]. $\mathscr{F}(\Lambda) \triangleq \{A \times X(S \backslash \Lambda): A \in \mathscr{F}_0(\Lambda)\}$, 当 $\Lambda \in \mathscr{S}$ 时, $\mathscr{F}(\Lambda)$ 称为以 Λ **为底的柱集类**, $\bigcup_{\Lambda \in \mathscr{S}} \mathscr{F}(\Lambda)$ 称 X 的**柱集类**. 记

$$\mathscr{F} \triangleq \mathscr{F}(S) = \mathscr{F}_0(S),$$

它是 X 的 Borel σ- 域[见附录引理 1.5(iii)].

和导言中所解释的一样, S 表示所要讨论的粒子系统所能占据的"位置"集, Y_u 表示位置 $u \in S$ 处可能的状态集, 称为**因子空间**. X 的元表示整个系统的状态, 按物理习惯称之为粒子系统的**组态**, X 为整个系统的一切组态作成的集, 称为系统的**组态空间**. $X(\Lambda)$ 表示在 $\Lambda \subset S$ 上的子系统的组态空间. $\mathscr{F}_0(\Lambda)$ 表示 Λ 上的子系统的事件域,而 $\mathscr{F}(\Lambda)$ 则表示整个系统只涉及 Λ 上的子系统的事件集. 给定 $\zeta \in X(S \backslash \Lambda)$, $X(\Lambda) \times \{\zeta\}$ 表示整个系统在 Λ 外的组态是 ζ 的一切组态集,

$$\mathscr{F}_0(\Lambda) \times \{\zeta\} \triangleq \{A \times \{\zeta\}: A \in \mathscr{F}_0(\Lambda)\}$$

表示整个系统在 Λ 外的组态是 ζ 的那些事件组成的事件集.

为了下面叙述方便,我们还引进以下一些记号:今后将 $\eta(u)$, $\zeta(u), \cdots$ (或$\eta_u, \zeta_u, \cdots$) 表示 $\eta, \zeta, \cdots$ 在 $u \in S$ 处的状态, 因而有必要时, $\eta, \zeta, \xi \in X$ 就表成 $\{\eta(u): u \in S\}$, $\{\zeta(u): u \in S\}$, $\{\xi(u): u \in S\} \cdots$, $\eta, \zeta, \xi \in X(\Lambda)$ 就表成 $\{\eta(u): u \in \Lambda\}$, $\{\zeta(u): u \in \Lambda\}$, $\{\xi(u): u \in \Lambda\}, \cdots$. 若 $\eta = \{\eta_u: u \in S\} \in X$, 则
$\forall \Lambda \subset S$, $\eta_\Lambda \triangleq \eta(\Lambda) \triangleq \{\eta(u): u \in \Lambda\} \in X(\Lambda)$ 称为 $\eta \in X$ 在$X(\Lambda)$上的**投影**.设 $\eta \in X(\Lambda), \zeta \in X(S \backslash \Lambda)$,定义

$$\eta \times \zeta \in X: (\eta \times \zeta)(u) \triangleq \begin{cases} \eta(u), & u \in \Lambda, \\ \zeta(u), & u \in S \backslash \Lambda, \end{cases}$$

一般地,若 $\Lambda_k \subset S$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 两两不交且

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k = \Lambda, \quad \eta_k \in X(\Lambda_k),$$

则定义

$$\eta_1 \times \cdots \times \eta_n \in X(\Lambda): (\eta_1 \times \cdots \times \eta_n)(u) \triangleq \eta_k(u)$$

$$u \in \Lambda_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

即 $\eta_1 \times \cdots \times \eta_n \in X(\Lambda)$，它在 $X(\Lambda_k)$ 上的投影为 η_k。

以 $\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{P}(X(\Lambda))$，$\mathscr{M}(X(\Lambda))$，$\Lambda \subset S$，分别表示 $(X, \mathscr{F})$，$(X(\Lambda), \mathscr{F}_0(\Lambda))$，上的概率测度及有限测度集。

2. 定义 粒子系统的局部动力特征由一族转移测度 $c(\Lambda, \eta, A)$，$\Lambda \in \mathscr{S} \backslash \{\phi\}$，$\eta \in X$，$A \in \mathscr{F}_0(\Lambda)$，给出，它们满足以下条件：

(2.1) $\forall \Lambda \in \mathscr{S} \backslash \{\phi\}$，$\eta \in X$，$c(\Lambda, \eta, \cdot) \in \mathscr{M}(X(\Lambda))$；

(2.2) $\forall \Lambda \in \mathscr{S} \backslash \{\phi\}$，$\eta \to c(\Lambda, \eta, \cdot)$ 是X到 $\mathscr{M}(X(\Lambda))$ 中的连续映射，其中 $\mathscr{M}(X(\Lambda))$ 赋弱收敛拓扑；

(2.3) $\forall \Lambda \in \mathscr{S} \backslash \{\phi\}$，$\eta \in X$，$c(\Lambda, \eta, \{\eta_\Lambda\}) = 0$。

$c(\Lambda, \eta, A)$ 的直观解释是：设目前的组态是 η，在 Λ 上的坐标将发生改变的概率速率是 $c(\Lambda, \eta, X(\Lambda))$，而 Λ 上的坐标改变到 $A \in \mathscr{F}_0(\Lambda)$ 中的概率速率是 $c(\Lambda, \eta, A)$，所以 $c(\Lambda, \eta, A)$ 也可称为**转移概率速度测度**。熟悉 q 过程的读者很容易发现它与 q 函数 $q(X, A)$ 有类似之处.

在作进一步一般讨论之前，我们先看一下 $c(\Lambda, \eta, A)$ 与自旋变相模型和排它模型之间的关系。

当 $Y_u = \{0, 1\}$ 时，若

$$(2.4)\ c(\Lambda, \eta, A) \triangleq \begin{cases} 0, & |\Lambda| \geqslant 2 \text{ 或 } \Lambda = \{u\},\ A = \{\eta(u)\}, \\ c(u, \eta), & \Lambda = \{u\},\quad A \supset \{1 - \eta(u)\}, \end{cases}$$

则 $c(\Lambda, \eta, A)$ 给出了自旋变相模型。

当 $Y_u = \{0, 1\}$ 时，若

$$(2.5)\quad c(\Lambda,\eta,A)\triangleq\begin{cases} c(u,v,\eta), & \Lambda=\{u,v\},\ \eta_u\neq\eta_v,\ \text{且} \\ & A\supset\{\{\xi_u,\xi_v\}:\ \xi_u=\eta_v,\ \xi_v=\eta_u\}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $c(\Lambda,\eta,A)$ 给出了排它模型.

由上述 $c(\Lambda,\eta,A)$ 的直观解释, 可以设想: 需要构造的无穷粒子系统马尔可夫过程的无穷小母元应该具有下列形式:

$$(2.6)\qquad (\Omega f)(\eta)\triangleq\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}}\int_{X(\Lambda)}c(\Lambda,\eta,d\zeta)[f(\zeta\times\eta_{S\setminus\Lambda})-f(\eta)]$$

(如果它是闭算子)或者是 $\bar{\Omega}$. 这里首先产生的问题是(6)的定义域是什么? 为此给出下列的定义

$$(2.7)\quad \forall f\in C_b(X),\quad u\in S,\quad \Delta_f(u)\triangleq\sup\{|f(\zeta\times\eta_{S\setminus\{u\}})-f(\eta)|:\ \eta\in X,\ \zeta\in Y_u\}$$

$$(2.8)\qquad \mathscr{D}(X)\triangleq\left\{f\in C_b(X):\ |||f|||\triangleq\sum_{u\in S}\Delta_f(u)<\infty\right\}$$

$$(2.9)\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S}\setminus\{\phi\},\quad c_\Lambda\triangleq\sup\{c(\Lambda,\eta,X(\Lambda)):\eta\in X\}$$

3. 命题 在上述记号及假设下, 设

$$(3.1)\qquad \sup\left\{\sum_{\Lambda\ni u}c_\Lambda: u\in S\right\}<\infty$$

则 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$, 由(2.6)定义的 $\Omega f\in C_b(X)$, 而且有

$$(3.2)\qquad \|\Omega f\|\leqslant\left(\sup_{u\in S}\sum_{\Lambda\ni u}c_\Lambda\right)|||f|||.$$

因而以后约定

$$(3.3)\qquad \mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}(X).$$

证. (1) 先证: 若 $f\in C_b(X)$, 则

$$(3.4)\quad h(\cdot)\triangleq\int_{X(\Lambda)}c(\Lambda,\cdot,d\zeta)[f(\zeta\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})-f]\in C_b(X).$$

事实上, $\forall\eta\in X, g(\eta,\cdot)\triangleq f((\cdot)\times\eta_{S\setminus\Lambda})-f(\eta)\in C_b(X(\Lambda))$, 因而(3.4)的左边有意义, 且由(2.2)知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ 使当

$$\rho(\tilde{\eta},\eta)<\delta_1\ \text{时}$$

$$(3.5)\quad \left|\int c(\Lambda,\tilde{\eta},d\zeta)g(\eta,\zeta)-\int c(\Lambda,\eta,d\zeta)g(\eta,\zeta)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，$g(\eta,\zeta)$，$(\eta,\zeta)\in X\times X(\Lambda)$ 是连续函数，由 $X\times X(\Lambda)$ 是紧距离空间知它是 (η,ζ) 的一致连续函数。因而 $\exists\delta_2>0$ 使当 $\rho(\tilde{\eta},\eta)<\delta_2$ 时，$\forall\zeta\in X(\Lambda)$ 有

$$(3.6)\qquad |g(\tilde{\eta},\zeta)-g(\eta,\zeta)|<\varepsilon/2c_\Lambda$$

于是当 $\rho(\tilde{\eta},\eta)<\delta_1\wedge\delta_2$ 时，由(3.5)，(3.6)知

$$\begin{aligned}|h(\tilde{\eta})-h(\eta)| &\leqslant \int c(\Lambda,\tilde{\eta},d\zeta)\,|g(\tilde{\eta},\zeta)-g(\eta,\zeta)|\\ &\quad+\left|\int c(\Lambda,\tilde{\eta},d\zeta)g(\eta,\zeta)-\int c(\Lambda,\eta,d\zeta)g(\eta,\zeta)\right|\\ &< (\varepsilon/2c_\Lambda)c(\Lambda,\tilde{\eta},X(\Lambda))+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $h\in C(X)=C_b(X)$。

(ii) 其次，$\forall\zeta\in X(\Lambda)$，$\zeta\times\eta_{S\setminus\Lambda}$ 可以看成依次改变 η 在 Λ 上的坐标 $\eta(u),u\in\Lambda$，成 $\zeta(u)$（每次改变一个坐标）而得，于是由 $\Delta_f(u)$ 的定义(2.7)易见

$$|f(\zeta\times\eta_{S\setminus\Lambda})-f(\eta)|\leqslant\sum_{u\in\Lambda}\Delta_f(u).$$

因而由 c_Λ 的定义(2.9)知

$$(3.7)\quad \left\|\int c(\Lambda,\cdot,d\zeta)[f(\zeta\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})-f]\right\|\leqslant c_\Lambda\sum_{u\in\Lambda}\Delta_f(u).$$

再由 Ω 的定义(2.6)知：当 $f\in\mathscr{D}(X)$ 时，

$$\begin{aligned}\sup_\eta|\Omega f(\eta)| &\leqslant \sum_{\Lambda\in\mathscr{S}}c_\Lambda\sum_{u\in\Lambda}\Delta_f(u)\\ &=\sum_{u\in S}\Big(\sum_{\Lambda\ni u}c_\Lambda\Big)\Delta_f(u)\\ &\leqslant\Big(\sup_u\sum_{\Lambda\ni u}c_\Lambda\Big)\cdot|||f|||,\end{aligned}$$

即(2.6)的右边为绝对收敛的连续函数项级数，所以 $\Omega f\in C_b(X)$ 且(3.2)式成立。 □

4. 记号 在叙述定理之前，我们还需要一些记号。 $\forall u\in S$，$\Lambda\in\mathscr{S}$，令

(4.1) $c_\Lambda(u)\triangleq\sup\{\|c(\Lambda,\eta_{S\setminus(u)}\times\zeta,\cdot)-c(\Lambda,\eta,\cdot)\|_\Lambda:\eta\in X,$
$\zeta\in Y_u\}$

其中 $\|\cdot\|_\Lambda$ 表示 $\mathscr{F}_0(\Lambda)$ 上的 σ- 可加集函数的全变差，它是 $c(\Lambda,\eta,\cdot)$ 依赖于坐标 $\eta(u)$ 的量的度量. 其次令

$$(4.2)\qquad \gamma(x,u)=\begin{cases}\sum\limits_{\Lambda\ni x}c_\Lambda(u), & x\neq u,\\ 0, & x=u,\end{cases}\qquad x,u\in S$$

再令

$$(4.3)\ l_1(S)\triangleq\left\{\beta:\ \beta:S\to R,\ \|\beta\|_{l_1}\triangleq\sum_{u\in S}|\beta(u)|<\infty\right\}$$

并定义 $l_1(S)$ 上的线性算子

$$(4.4)\qquad \Gamma:(\Gamma\beta)(u)\triangleq\sum_{v\in S}\beta(v)\gamma(v,u),\beta\in l_1(S),u\in S.$$

此外再定义

$$(4.5)\ M\triangleq\sup\left\{\sum_{\Lambda\ni v}\sum_{u\neq v}c_\Lambda(u):v\in S\right\}=\sup\left\{\sum_u\gamma(v,u):v\in S\right\},$$

$$(4.6)\ \varepsilon\triangleq\inf_{u\in S}\inf_{\substack{\eta_1(u)\neq\eta_2(u)\\ \eta_1(S\setminus u)=\eta_2(S\setminus u)}}\sum_{\Lambda\ni u}[c(\Lambda,\eta_1,\{\zeta:\zeta(u)=\eta_2(u)\})$$
$$+c(\Lambda,\eta_2,\{\zeta:\zeta(u)=\eta_1(u)\})].$$

当测度族 $c(\Lambda,\eta,A)$ 换成 $c^{(n)}(\Lambda,\eta,A)$ 时,则按第 2,4 两目中定义的 Ω,c_Λ，$c_\Lambda(u)$，$\gamma(x,u)$,Γ，M，ε 分别记成 $\Omega^{(n)},c_\Lambda^{(n)}$，$c_\Lambda^{(n)}(u)$，$\gamma^{(n)}(x,u)$，$\Gamma^{(n)}$，$M^{(n)}$，$\varepsilon^{(n)}$.

现在我们叙述本节的主要定理.

5. 定理 设(3.1)及

$$(5.1)\qquad M<\infty$$

成立，则

(i) 存在一个唯一的随机连续 Feller 函数 $p(t,\eta,A), t\geqslant 0$, $\eta\in X$, $A\in\mathscr{F}$ 使得强连续压缩半群

$$(5.2)\quad S(t):\ S(t)f(\eta)\triangleq\int p(t,\eta,d\zeta)f(\zeta),\ f\in C_b(X),\ \eta\in X,\ t\geqslant 0$$

以 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 为其无穷小母元(今后称为马氏半群).

(ii) $\mathscr{D}(X)$ 是 $\bar{\Omega}$ 的一个核，即 $\overline{\Omega|_{\mathscr{D}(X)}}=\bar{\Omega}$.

(iii) Γ 是 $l_1(S)$ 上的有界正算子.

(iv) $\forall f\in\mathscr{D}(X)$,

$$(5.3)\qquad \Delta_{S(t)f}\leqslant e^{-\varepsilon t}\exp(t\Gamma)\Delta_f.$$

(v) 若 $f\in\mathscr{D}(X)$，则 $S(t)f\in\mathscr{D}(X)$, $\forall t\geqslant 0$，且

$$(5.4)\qquad |||S(t)f|||\leqslant\exp[(M-\varepsilon)t]\cdot|||f|||.$$

这条定理的证明我们留待下节去进行，现在来叙述并证明它的一系列推论.

6. 推论 设 $c(\Lambda,\eta,A)$, $c^{(n)}(\Lambda,\eta,A)$, $n\geqslant 1$, $\Lambda\in\mathscr{S}\backslash\{\phi\}$, $\eta\in X$, $A\in\mathscr{F}_0(\Lambda)$，是转移概率速度测度，并且都满足 (3.1) 及 (5.1). 令 $\Omega,\Omega^{(n)}$ 为按 (2.6) 定义在 $\mathscr{D}(X)$ 上的算子. $\{S(t): t\geqslant 0\}$, $\{S_n(t): t\geqslant 0\}$，分别是以 $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}^{(n)}$ 为无穷小母元的马氏半群. 若

$$(6.1)\qquad \forall f\in\mathscr{D}(X),\ \lim_{n\to\infty}\|\Omega f-\Omega^{(n)}f\|=0,$$

则

$$(6.2)\qquad \forall t_0\in(0,\infty),\ \forall f\in C_b(X),$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\|S(t)f-S_n(t)f\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

证. 由定理 5 知 $\{S_n(t): t\geqslant 0\}$, $\{S(t): t\geqslant 0\}$ 存在. $\mathscr{D}(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠且 $\mathscr{D}(X)\subset\mathscr{D}(\bar{\Omega}_n)$. $\overline{\Omega|_{\mathscr{D}(X)}}=\bar{\Omega}$ (定理 5 (ii))，于是由定理 1.5 知(6.1)导出(6.2). 事实上，由注 1.6 知(6.2)中的“$0\leqslant t\leqslant t_0$”还可换成“$t\in K$”，$K$ 为$[0,\infty)$中的任何紧集. □

现在将定理应用于自旋变相模型立得

7. 定理 设 $X=\{0,1\}^S$, $\{c(u,\cdot):u\in S\}$ 是 $C_b(X)$ 中的一致有界非负函数集且

(7.1) $$\sup\{|||c(u,\cdot)|||:u\in S\}<\infty.$$

再定义

$$_u\eta\in X:(_u\eta)(v)=\begin{cases}\eta(v), & v\neq u,\\ 1-\eta(u), & v=u,\end{cases}$$

(7.2) $$\Omega:(\Omega f)(\eta)\triangleq\sum_{u\in S}c(u,\eta)[f(_u\eta)-f(\eta)],$$

$$\mathscr{D}(\Omega)\triangleq\mathscr{D}(X).$$

则 (i) 存在一个唯一的随机连续 Feller 函数 $p(t,\eta,A),t\geq 0$, $\eta\in X$, $A\in\mathscr{F}$ 使马氏半群

(7.3) $$S(t):S(t)f(\eta)\triangleq\int p(t,\eta,d\zeta)f(\zeta),\ \eta\in X,\ f\in C_b(X),\ t\geq 0.$$

以 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 为无穷小母元.

(ii) 存在一个以 $c(u,\eta),u\in S$, $\eta\in X$,为速度函数的自旋变相过程 $\{\eta_t:t\geq 0\}$, 以 (i) 中的 $p(t,\eta,A)$ 为转移函数.

(iii) 设 $\{\Lambda_n:n\geq 1\}\subset\mathscr{S}$, $\Lambda_n\uparrow S$, 并令

(7.4) $$\Omega_n:(\Omega_n f)(\eta)\triangleq\sum_{u\in\Lambda_n}c(u,\eta)[f(_u\eta)-f(\eta)],\eta\in X,$$

$$f\in\mathscr{D}(X)=\mathscr{D}(\Omega).$$

则 Ω_n 是以 $C_b(X)$ 上的有界算子; 且有一以 X 为状态空间的随机连续 Feller 过程;用它的转移函数 $p_n(t,\eta,A)$ 按(7.3)定义的马氏半群 $\{S_n(t):t\geq 0\}$ 以 Ω_n 为无穷小母元; 对 $[0,\infty)$ 的任何紧子集 K 及 $f\in C_b(X)$ 有

(7.5) $$\sup_{t\in K}\|S_n(t)f-S(t)f\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

证. 按(2.4)定义 $c(\Lambda,\eta,A)$, 容易验证(2.6)定义的算子 Ω 即(7.2),此外

$$c_A = \begin{cases} 0, & |A| \geqslant 2, \\ \|c(u,\cdot)\|, & A = \{u\}, \end{cases}$$

因而

$$\sup\left\{\sum_{A \ni u} c_A : u \in S\right\} = \sup\{\|c(u,\cdot)\| : u \in S\} < \infty,$$

即 (3.1)满足。还有由(2.4), (4.1)知当 $|A| \geqslant 2$ 时 $c_A(v) = 0$, $v \in S$; 当 $A = \{u\}$ 时,由(2.4), (4.1), (2.7)知 $\forall v \in S$, $v \neq u$, 有

$$c_{\{u\}}(v) = \sup\{|c(u,{}_v\eta) - c(u,\eta)| : \eta \in X\} = \Delta_{c(u,\cdot)}(v)$$

因而由(4.5),(7.1)知

$$M = \sup_v \sum_{u \neq v} c_{\{v\}}(u) = \sup_v \sum_{u \neq v} \Delta_{c(v,\cdot)}(u)$$

$$\leqslant \sup_v |||c(v,\cdot)||| < \infty.$$

故由定理 5(i) 知 (i) 成立。

再证 (ii): 由 (i) [1, § 4.2 定理 2 及注 2]知存在以 $p(t,\eta,A)$ 为转移函数的随机连续 Feller 过程 $(\{\eta_t : t \geqslant 0\}, \{P_\eta : \eta \in X\})$. $\forall \eta \in X$, 由 $f \triangleq I_{\{\xi \in X : \xi(u) \neq \eta(u)\}} \in C_b(X)$ [附录,引理 2.6] 及

$$|||f||| = \sum_v \Delta_f(v) = \Delta_f(u) = 1 < \infty$$

知 $f \in \mathscr{D}(\Omega)$. 故由(7.3),(1.16),(7.2)得知

$$\frac{d}{dt} P_\eta(\eta_t(u) \neq \eta(u))|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} p(t,\eta,\{\xi : \xi(u) \neq \eta(u)\})|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} [S(t)f(\eta)]_{t=0} = (\Omega f)(\eta) = c(u,\eta).$$

即导言中(2.2)的第一式获证. 为了证明导言(2.2)中的第二式,取 $f = I_{\{\xi \in X : \xi(u) \neq \eta(u), \xi(v) \neq \eta(v)\}}$ 并仿上法即可. 故上面构造的过程是以

$c(u,\eta)$ 为速度函数的自旋变相过程.

由推论 6 知要证 (iii) 只需证 Ω_n 是 $C_b(X)$ 上的有界算子即可. 事实上, $\forall f\in C_b(X)$, 显然 $\Omega_n f\in C_b(X)$,

$$|\Omega_n f|\leqslant \sum_{u\in A_n}\|c(u,\ \cdot)\|\cdot 2\|f\|\leqslant 2|A_n|(\sup_u\|c(u,\cdot)\|)\cdot\|f\|.\square$$

8. 推论 若伊辛模型的交互作用势 Φ 满足:

$$B\triangleq\sup\left\{\sum_{A\ni u}|\Phi(A)|\cdot|A|:\ u\in S\right\}<\infty, \tag{8.1}$$

则伊辛过程存在.

证. 由于当 $A\in\mathscr{S}$ 时,

$$\chi_A(\eta)\triangleq\prod_{v\in A}(2\eta(v)-1)$$

是柱函数,因而由附录引理 2.6(i) 知连续. 又因

$$\left|\sum_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right|\leqslant\sum_{A\ni u}|\Phi(A)|\leqslant B<\infty,$$

所以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$, 连续且一致有界. 故由定理 7 只需验证 (7.1).

由中值定理得

$$|e^x-e^y|\leqslant|x-y|e^{\max(x,y)},\ \forall x,y\in(-\infty,\infty), \tag{8.2}$$

又易知

$$\chi_A({}_v\eta)-\chi_A(\eta)=\begin{cases}0, & v\notin A,\\ -2\chi_A(\eta), & v\in A.\end{cases} \tag{8.3}$$

于是由导言的(3.2)及(8.2),(8.3)得

$$|c(u,{}_v\eta)-c(u,\eta)|$$

$$\leqslant\beta\left|\sum_{A\ni u}\Phi(A)(\chi_A({}_v\eta)-\chi_A(\eta))\right|\exp\left\{\beta\sum_{A\ni u}|\Phi(A)|\right\}$$

$$\leqslant 2\beta \sum_{A\ni u,v} |\Phi(A)| \exp(\beta B).$$

故由上式及(8.1)得

$$|||c(u,\cdot)||| = \sum_{v} \Delta_{c(u,\cdot)}(v) \leqslant 2\beta \sum_{v\in S} \sum_{A\ni u,v} |\Phi(A)| e^{\beta B}$$

$$= 2\beta \sum_{A\ni u} \sum_{v\in A} |\Phi(A)| e^{\beta B}$$

$$= 2\beta \sum_{A\ni u} |A||\Phi(A)| e^{\beta B} \leqslant 2\beta B e^{\beta B}.$$

从而(7.1)成立．故伊辛过程存在．

9. 推论 接触过程恒存在，

证． 由导言的(3.1)知 $\forall u\in S$, $c(u,\cdot)$ 是柱函数，因而连续且 $\|c(u,\cdot)\| \leqslant \max(1,|D|)$，故 $c(u,\cdot)$, $u\in S$, 一致有界．于是剩下的只需验证(7.1)．事实上，由导言的 (3.1) 易见当 $v\neq u$ 时，

$$\Delta_{c(u,\cdot)}(v) = \begin{cases}\lambda, & v-u\in D,\\ 0, & v-u\in D,\end{cases}$$

而 $\Delta_{c(u,\cdot)}(u) \leqslant 1+\lambda|D|$,

$$\sum_{v} \Delta_{c(u,\cdot)}(v) \leqslant (1+\lambda|D|) + \sum_{0\neq v-u\in D} \lambda \leqslant 2\lambda|D|+1.$$

故(7.1)成立．

10. 推论 当 $X=\{0,1\}^S$，速度函数为

(10.1) $\quad c(u,\eta) \triangleq \sum_{v\in S} p(u,v) I_{\{\xi:\xi(v)\neq\eta(u)\}}(\eta)$, $u\in S$, $\eta\in X$,

其中

$$p(u,v)\geqslant 0,\ u,v\in S,\ \sum_{v} p(u,v) = 1,\ u\in S$$

的模型称**选举模型**,与之相应的自旋变相过程称为**选举过程**.选举过程是存在的.

证. 先证：$\forall u\in S$，$c(u,\cdot)\in C(X)=C_b(X)$，设 ρ 为由(1.1)给出的X的距离，其中 $\rho_n(\bar{y},y)=1$，当 $\bar{y}\neq y$；$=0$，当 $\bar{y}=y$. 再设 $\rho(\eta_n,\eta)\to 0$，$\eta_n,\eta\in X$，则当 n 充分大时 $\eta(u)=\eta_n(u)$，此时容易算出

$$\begin{aligned}|c(u,\eta_n)-c(u,\eta)|&=\left|\sum_v p(u,v)[\eta_n(v)-\eta(v)]\right|\\&=\sum_{v\in A_n}p(u,v),\end{aligned}$$

其中 $A_n\triangleq\{v\in S:\eta_n(v)\neq\eta(v)\}\to S$.因而上式右边$\to 0$，故 $c(u,\cdot)\in C(X)=C_b(X)$.

其次，显然有 $\|c(u,\cdot)\|\leqslant 1$，并且容易验证：

$$|c(u,{}_v\eta)-c(u,\eta)|=\begin{cases}\left|\sum\limits_{w\in S}p(u,w)(2\eta(w)-1)\right|, & v=u,\\ |p(u,v)(2\eta(v)-1)|, & v\neq u,\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}|||c(u,\cdot)|||&=\Delta_{c(u,\cdot)}(u)+\sum_{v\neq u}\Delta_{c(u,\cdot)}(v)\\&=1+\sum_{v\neq u}p(u,v)\leqslant 2.\end{aligned}$$

即定理 7 的条件满足，从而选举过程存在。□

选举模型可以有如下直观解释：设“0”、“1”表示两种不同的观点。在 u 处的人的观点的改变受 v 处具不同观点的人的影响，其改变的概率速率为 $p(u,v)$. 这种影响是独立的，因此 u 处的人的观点改变的总概率速率是 $\sum\limits_v{}' p(u,v)$，此处和式 $\sum\limits_v{}'$ 中的 v 遍历所有与 u 具不同观点的 v.

将定理 5 应用于排它模型即得

11. 定理 设 $X=\{0,1\}^S$，$\forall u,v\in S$，$c(u,v,\cdot)\in C_b(X)$，且满足

(11.1) $\forall \eta \in X,\ c(u,v,\eta) = c(v,u,\eta) \geqslant 0;\ c(u,v,\eta) = 0,$

$\eta_u = \eta_v$.

(11.2) $\forall u,v \in S,\ \exists c(u,v)$ 使 $\|c(u,v,\cdot)\| \leqslant c(u,v) = c(v,u)$,

$c(u,u) = 0,$

(11.3)
$$\sup \left\{ \sum_{v \in S} c(u,v): u \in S \right\} < \infty,$$

(11.4) $\exists B > 0$ 使 $\forall u,v \in S, |||c(u,v,\cdot)||| \leqslant Bc(u,v)$.

再 $\forall u,v \in S,\ \eta \in X$，定义

$$_{(u,v)}\eta \in X: ({}_{(u,v)}\eta)(w) = \begin{cases} \eta(w) & w \neq u,v \\ \eta(v), & w = u \\ \eta(u), & w = v \end{cases}$$

即 η 在 u,v 处的状态互换而得到的组态是 $_{(u,v)}\eta$。

则 (i) 存在一个唯一的随机连续的 Feller 函数 $p(t,\ \eta, A)$，$t \geqslant 0,\ \eta \in X,\ A \in \mathscr{F}$，使得由它按(5.2)定义的马氏半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 以算子

(11.5)
$$\Omega:\ (\Omega f)(\eta) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{u,v \in S} c(u,v,\eta)[f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)],$$

$$f \in \mathscr{D}(\Omega) \triangleq \mathscr{D}(X),$$

的闭包 $\bar{\Omega}$ 为无穷小母元.

(ii) 存在一个以 $c(u,v,\eta)$ 为速度函数的排它过程 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\},\ \{P_\eta: \eta \in X\})$，它的转移概率是 (i) 中的 $p(t,\eta,A)$.

(iii) 设 $\{\Lambda_n: n \geqslant 1\} < \mathscr{S}$，$\Lambda_n \nearrow S$，并令

(11.6)
$$\Omega_n: (\Omega_n f)(\eta) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{u,v \in \Lambda_n} c(u,v,\eta)[f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)],$$

$$f \in C_b(X),$$

则 Ω_n 是 $C_b(X)$ 上的有界算子，有一以 X 为状态空间的随机连续

Feller 过程，用它的转移函数 $p_n(t,\eta,A)$ 按(5.2)定义的马氏半群 $\{S_n(t):t\geqslant 0\}$ 以 Ω_n 为无穷小母元，且对 $[0,\infty)$ 的任何紧子集 K 及 $f\in C_b(X)$ 有

$$(11.7)\qquad \sup\{\|S_n(t)f-S(t)f\|:t\in K\}\to 0\quad (n\to\infty).$$

证. 按(2.5)定义 $c(\Lambda,\eta,A)$, $\Lambda\in\mathscr{S}$, $\eta\in X$, $A\in\mathscr{F}_0(\Lambda)$. 容易验证按(2.6)定义的算子即(11.5). 此外有 $c_\Lambda=0$, 当 $|\Lambda|\neq 2$; $c_\Lambda=\|c(u,v,\cdot)\|$, 当 $|\Lambda|=2$, $\Lambda=\{u,v\}$, 于是由(11.2),(11.3)

$$\sup\left\{\sum_{\Lambda\ni u}c_\Lambda:u\in S\right\}=\sup\left\{\sum_{v\neq u}\|c(u,v,\cdot)\|:u\in S\right\}<\infty,$$

即(3.1)成立. 今往验证(5.1)成立. 为此先计算 $c_\Lambda(w)$, $w\in S$. 显然当 $|\Lambda|\neq 2$ 时, $c_\Lambda(w)=0$. 当 $\Lambda=\{u,v\}$, $u\neq v$ 时, 由(4.1)知

$$\begin{aligned}c_{\{u,v\}}(w)&=\sup\{\|c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)-c(\{u,v\},\eta,\cdot)\|_{\{u,v\}}:\eta\in X\}\\&=\begin{cases}\sup\{\|c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)-c(\{u,v\},\eta,\cdot)\|_{\{u,v\}}:\eta\in X,\\ \qquad \eta_u\neq\eta_v\},\ w\bar{\in}\{u,v\}\\ \sup\{\|c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)-c(\{u,v\},\eta,\cdot)\|_{\{u,v\}}:\eta\in X,\},\\ \qquad w\in\{u,v\}\end{cases}\end{aligned}$$

当 $w\bar{\in}\{u,v\}$, $\eta_u\neq\eta_v$ 时, 测度 $c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)$, $c(\{u,v\},\eta,\cdot)$ 的负荷都集中在 $\{\xi\in X(\{u,v\}):\xi(u)=\eta(v)\ \xi(v)=\eta(u)\}$ 上, 所以

$$\begin{aligned}&\|c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)-c(\{u,v\},\eta,\cdot)\|_{\{u,v\}}\\&\quad=|c(u,v,{}_w\eta)-c(u,v,\eta)|.\end{aligned}$$

当 $w\in\{u,v\}$ 时, $\eta(u)=\eta(v)$, $({}_w\eta)(u)=({}_w\eta)(v)$ 必有一成立, 因而 $c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)$, $c(\{u,v\},\eta,\cdot)$ 必有一且仅有一为零测度. 故此时

$$\|c(\{u,v\},{}_w\eta,\cdot)-c(\{u,v\},\eta,\cdot)\|_{\{u,v\}}$$

$$
=\begin{cases}|c(u,v,\eta)|, & ({}_w\eta)(u)=({}_w\eta)(v),\\ |c(u,v,{}_w\eta)|, & \eta(u)=\eta(v).\end{cases}
$$

总结以上讨论即得

$$
c_{(u,v)}(w)=\begin{cases}\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w), & w\bar{\in}\{u,v\},\\ \|c(u,v,\cdot)\|, & w\in\{u,v\},\end{cases}\quad c_A(w)=0,\quad |A|\neq 2.
$$

于由M的定义(4.5),(11.2),(11.3),(11.4)及此式得

$$
\begin{aligned}
M&=\sup\left\{\sum_{u\neq v}\sum_{w\neq v}c_{(u,v)}(w):v\in S\right\}\\
&=\sup\left\{\sum_{u\neq v}\left[\sum_{w\bar{\in}\{u,v\}}\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w)+\|c(u,v,\cdot)\|\right]:v\in S\right\}\\
&\overset{(11.4)(11.2)}{\leqslant}\sup\left\{(B+1)\sum_{u:u\neq v}c(v,u);v\in S\right\}\overset{(11.3)}{<}\infty
\end{aligned}
$$

故(5.1)成立. 于是由定理 5(i) 知 (i) 成立.

往证 (ii): 由过程理论(见[1, § 4.2 定理 2 及注 2]) 知存在以 $p(t,\eta,A)$ 为转移函数的随机连续 Feller 过程 $(\{\eta_t:t\geqslant 0\},\{P_\eta:\eta\in X\})$. $\forall u,v\in S$, $u\neq v$, $\forall\eta\in X$, $\eta_u\neq\eta_v$, 令

$$
f\triangleq I_{\{\xi\in X:\xi_u=\eta_v,\xi_v=\eta_u\}},
$$

则由附录引理 2.6 及 (2.8) 知 $f\in\mathscr{D}(X)=\mathscr{D}(D)$, 且

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_\eta(\eta_t(u)=\eta(v),\eta_t(v)=\eta(u))|_{t=0}\\
&\qquad=\frac{d}{dt}[S(t)f(\eta)]_{t=0}\\
&\qquad=(\Omega f)(\eta)=c(u,v,\eta).
\end{aligned}
$$

此即导言中(4.1)的第一式. 至于要得到导言中(4.1)的第 2 式, 只需取 $f\triangleq I_{\{\xi\in X:\xi(u)=\eta(v),\xi(v)=\eta(u),\xi(w)\neq\eta(w)\}}$ 并仿上证明即可. 故上面构造的过程是以 $c(u,v,\eta)$ 为速度函数的排它过程.

由推论 6 知要证 (iii) 只需证 Ω_n 是 $C_b(X)$上的有界算子即可. 事实上, $\forall f\in C_b(X)$ 显然

$\Omega_n f \in C_b(X)$.

$$\|\Omega_n f\| \leqslant 2\|f\| \sum_{u,v \in \Lambda_n} \|c(u,v,\cdot)\|$$

$$\leqslant 2|\Lambda_n| \left(\sup_u \sum_{v \in S} \|c(u,v,\cdot)\| \right) \cdot \|f\|. \square$$

12. 推论 设格气模型的速度函数

$$(12.1)\ c(u,v,\eta) \triangleq \begin{cases} 0, & \eta(u) = \eta(v), \quad u,v \in S, \\ \eta(u)c(u,\eta)p(u,v) + \eta(v)c(v,\eta)p(u,v), \\ & \eta(u) \neq \eta(v), \quad \eta \in X, \end{cases}$$

其中 $c(u,\eta)$ 满足定理 7 的条件，$p(u,v) \geqslant 0$，$p(u,u) = 0$，

$$(12.2) \qquad \sup_u \sum_v [p(u,v) + p(v,u)] < \infty.$$

则格气模型的排它过程存在.

证. 显然 $\forall u,v \in S$，$c(u,v,\cdot) \in C_b(X)$. 且

$$\|c(u,v,\cdot)\| \leqslant \sup_w \|c(w,\cdot)\| [p(u,v) + p(v,u)].$$

于是令 $c(u,v) \triangleq c[p(u,v) + p(v,u)]$，$c \triangleq \sup_u \|c(u,\cdot)\|$，由 (12.2)知(11.2)，(11.3)成立. 今往验证(11.4).

当 $v = u$ 时，显然(11.4)对任何 $B > 0$ 成立. 故只需讨论 $u \neq v$ 的情形. 当 $w \neq u,v$ 时，易见

$$\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w) \leqslant \Delta_{c(u,\cdot)}(w)p(u,v) + \Delta_{c(v,\cdot)}(w)p(v,u).$$

令 $c \triangleq \sup_u \|c(u,\cdot)\|$，则易见

$$\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w) \leqslant \begin{cases} cp(u,v) + \Delta_{c(v,\cdot)}(w)p(v,u), w = u (w \neq v), \\ \Delta_{c(u,\cdot)}(w)p(u,v) + cp(v,u), w = v (w \neq u). \end{cases}$$

于是 $\forall u,v \in S$，$u \neq v$，

$$|||c(u,v,\cdot)||| = \sum_w \Delta_{c(u,v,\cdot)}(w)$$

$$\leqslant c[p(u,v) + p(v,u)] + \sum_{w \neq u} \Delta_{c(u,\cdot)}(w)p(u,v)$$

$$+ \sum_{u \neq v} \Delta_{c(v,\cdot)}(w) p(v,u)$$

$$\leqslant \left[\sup_{u} \sum_{v: w \neq u} \Delta_{c(u,\cdot)}(w) + c\right] (p(u,v) + p(v,u))$$

令

$$B \triangleq \frac{1}{c} \left[\sup_{u} \sum_{v: w \neq u} \Delta_{c(u,\cdot)}(w) + c\right]$$

(由7.1)知 $B < \infty$)，则(11.4)成立．故由定理 11 知格气模型的排它过程存在．□

导言中还提到排它过程的另一个例子是合金模型，现在讨论它的存在性．

13. 推论 设 $X = \{0,1\}^S$，称具有速度函数

$$(13.1)\ c(u,v,\eta) \triangleq \begin{cases} 0, & \eta(u) = \eta(v), \\ \eta(u) \dfrac{c(u,\eta)}{c(u,\eta) + c(v,{}_{u,v}\eta)} p(u,v) & \\ \quad + \eta(v) \dfrac{c(v,\eta)}{c(v,\eta) + c(u,{}_{u,v}\eta)} p(v,u), & \\ & \eta(u) \neq \eta(v). \end{cases}$$

的模型为**二元合金模型**．若其中 $p(u, v)$ 满足推论 12 中所列条件，$c(u, \eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$ 满足定理 7 中所列的除一致有界以外的一切条件且

$$(13.2)\qquad l \triangleq \inf\{c(u,\eta): u \in S, \eta \in X\} > 0.$$

则二元合金模型的排它过程存在．

证． 令 $c(u,v) \triangleq p(u,v) + p(v,u)$，$u, v \in S$，则由上述假设知 $c(u, v, \eta)$ 满足定理 11 中除(11.4)以外的一切条件．故只需验证(11.4)．

与推论 12 的证明一样，只需讨论 $u \neq v$ 的情形．首先注意有初等不等式

$$\left|\frac{a'}{a'+b'}-\frac{a}{a+b}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a'+b'}[|a-a'|+|b-b'|], a,a',b,b'>0.$$

对 $f\in C_b(X)$，记 $\Delta_w f(\eta)\triangleq f(_w\eta)-f(\eta)$，$w\in S$，$\eta\in X$，则由(13.1)，(13.2)知 $\forall w\in S$，$\eta\in X$ 有

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_w c(u,v,\cdot)(\eta)| \\
&\leqslant p(u,v)\frac{|\Delta_w c(u,\cdot)(\eta)|+|\Delta_w c(v,_{(u,v)}(\cdot)(\eta)|}{c(u,\eta)+c(v,_{(u,v)}\eta)} \\
&\quad+p(v,u)\frac{|\Delta_w c(v,\cdot)(\eta)|+|\Delta_w c(u,_{(u,v)}(\cdot)(\eta)|}{c(v,\eta)+c(u,_{(u,v)}\eta)} \\
&\leqslant\frac{1}{2l}[\Delta_{c(u,\cdot)}(w)+\Delta_{c(v,\cdot)}(w)]c(u,v)
\end{aligned}
$$

取 $B\triangleq\frac{1}{l}\sup_u|||c(u,\cdot)|||$，则由上式知

$$
\begin{aligned}
|||c(u,v,\cdot)||| &=\sum_w\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w) \\
&=\sum_w\sup_\eta|\Delta_w c(u,v,\cdot)(\eta)| \\
&\leqslant\frac{1}{2l}[|||c(u,\cdot)|||+|||c(v,\cdot)|||]c(u,v) \\
&\leqslant Bc(u,v).
\end{aligned}
$$

此即(11.4)。 故由定理 11 知二元合金模型的排它过程存在．□

§3 定理 2.5 的証明

概括说来，定理 2.5 的证明主要验证按(2.2.6) (2.3.3)定义的算子的闭包 Ω 满足定理 1.2 的一切条件，由于证明较长，先概述一

下它的主要证明步骤：1° 证明Ω具有定理1.2中除(1.2.2)外的一切性质(即(1.2.1)，(1.2.3)，(1.2.4))；2° 证明 $\bar{\Omega}$ 存在且$\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})$ 为 $C_b(X)$ 中的闭集，仍然满足(1.2.1)，(1.2.3)，(1.2.4)；3° $\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})=\overline{\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)}\supset\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}(X)$，因而$\bar{\Omega}$满足定理1.2的条件，由此导出定理2.5(i)。在证明3°的过程中需要一些估计，这些估计导致定理2.5的(ii)—(v)诸结论。我们将这些证明步骤写成一系列引理，并顺便指出其中哪些结论具有一般性。

本节采用§2第5目以前的符号。

1. 引理 $\mathscr{D}(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠。

证. 应用 Stone-Weierstrass 逼近定理。首先证明$\mathscr{D}(X)$是一个代数，显然它是线性空间，因此只需验证：它对乘法封闭。设f, $g\in\mathscr{D}(X)$，则 $fg\in C_b(X)$ 且由 $\Delta_f(u)$ 的定义及初等不等式

$$|ab-a'b'|\leqslant|a|\cdot|b-b'|+b'|a-a'|$$

易知有

$$\Delta_{fg}(u)\leqslant\|f\|\Delta_g(u)+\|g\|\Delta_f(u),\quad u\in S,$$

因而

$$|||fg|||\leqslant\|f\|\cdot|||g|||+\|g\|\cdot|||f|||<\infty,$$

故 $fg\in\mathscr{D}(X)$。

其次对任给 $\xi_1,\xi_2\in X$，$\xi_1\neq\xi_2$。则函数 $f(\eta)\triangleq\rho(\xi_1,\eta)$($\rho$为X的距离)分离$\xi_1,\xi_2$，即 $f(\xi_1)=0<\rho(\xi_1,\xi_2)=f(\xi_2)$。若能证明此函数 $f\in\mathscr{D}(X)$，则由 **Stone-Weierstrass 定理**（见附录定理2.3)知 $\mathscr{D}(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠。

今往证：$f\triangleq\rho(\xi_1,\cdot)\in\mathscr{D}(X)$. 设$\rho$为(2.1.1)所定义，任取$u_k\in S$，则由 $\rho_n(y_n,\tilde{y}_n)\wedge 1$，$y_n$，$\tilde{y}_n\in Y_{u_n}$ 是 Y_{u_n} 上的距离及(2.1.1)知 $\forall S\in Y_{u_k}$，$\eta\in X$，

$$|f(\zeta\times\eta_{S\setminus u_k})-f(\eta)|=|\rho(\xi_1,\zeta\times\eta_{S\setminus u_k})-\rho(\xi_1,\eta)|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} [\rho_n(\xi_1(u_n), (\zeta \times \eta_{S\setminus u_k})(u_n)) \wedge 1 - \rho_n(\xi_1(u_n), \eta(u_n)) \wedge 1] \right|$$

$$= 2^{-k} | \rho_k(\xi_1(u_k), \zeta) \wedge 1 - \rho_k(\xi_1(u_k), \eta(u_k)) \wedge 1 |$$

$$\leqslant 2^{-k} \rho_k(\zeta, \eta(u_k)) \wedge 1.$$

因而

$$\Delta_f(u_k) \lesssim 2^{-k} \sup\{ \rho_k(\zeta, \eta) \wedge 1 : \zeta, \eta \in Y_{u_k} \} \lesssim \frac{1}{2^k},$$

$$|||f||| = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_f(u_k) \leqslant 1, \text{ 即 } f \in \mathscr{D}(X). \qquad \square$$

2. 引理 Ω 具有下列性质:

(2.1) $\mathscr{D}(\Omega) = \mathscr{D}(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠;

(2.2) $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\lambda \geqslant 0$,

$$\min\{f(\eta) : \eta \in X\} \geqslant \min\{f(\eta) - \lambda \Omega f(\eta) : \eta \in X\};$$

(2.3) $1 \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\Omega 1 = 0$.

此外,由(2.2)可导出

(2.4) $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\lambda \geqslant 0$, 令 $g \triangleq f - \lambda \Omega f$, 则 $\|f\| \leqslant \|g\|$.

註. 由下面证明可以看出: (2.2)⇒(2.4)对 $C_b(X)$ 上的任何算子 Ω 成立.

证. (2.1)在引理 1 中已证,(2.3)由 Ω 的定义立刻看出,设

$$f(\underline{\eta}) = \min\{f(\eta) : \eta \in X\},$$

则由 Ω 的定义立知 $(\Omega f)(\underline{\eta}) \geqslant 0$. 于是

$$f(\underline{\eta}) \geqslant f(\underline{\eta}) - \lambda \Omega f(\underline{\eta}) \geqslant \min\{f(\eta) - \lambda \Omega f(\eta) : \eta \in X\},$$

此即(2.2).

今往证: (2.2)⇒(2.4). 事实上, $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\|f\| = \sup\{f(\eta) : \eta \in X\} \vee (-\inf\{f(\eta) : \eta \in X\})$$

而且由附录定理 2.2 知它在 X 上到达最大值与最小值,设

$$f(\bar\eta)=\sup\{f(\eta):\eta\in X\},\ f(\underline\eta)=\inf\{f(\eta):\eta\in X\}.$$

若 $f(\bar\eta)>-f(\underline\eta)$，则由(2.2)即得

$$\|f\|=f(\bar\eta)\leqslant f(\bar\eta)-\lambda\Omega f(\bar\eta)=g(\bar\eta)\leqslant\max_{\eta\in X}g(\eta).$$

若 $f(\bar\eta)\leqslant -f(\underline\eta)$， 则 $-f(\underline\eta)=\sup\{(-f)(\eta):\eta\in X\}$，于是由(2.2)

$$\|f\|=-f(\underline\eta)\leqslant -f(\underline\eta)-\lambda\Omega(-f)(\underline\eta)=-g(\underline\eta)$$
$$\leqslant -\min_{\eta\in X}g(\eta)$$

故

$$\|f\|\leqslant[\max g(\eta)]\vee[-\min g(\eta)]=\|g\|.\ \square$$

3. 引理 Ω 的闭包 $\bar\Omega$ 存在，且仍然具有性质 (2.1)—(2.4)，$I-\lambda\bar\Omega$，$\lambda>0$ 的值域是 $C_b(X)$ 中的闭集，

$$\mathscr{R}(I-\lambda\bar\Omega)=\overline{\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)}.$$

证. (i) 由(1.4.4)知要证 $\bar\Omega$ 的存在，只需证

(3.1) $\forall\{f_n\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$，$f_n\to 0$，$\Omega f_n$ 收敛，有 $\Omega f_n\to 0$.

设 $\Omega f_n\to h$，则由(2.4)知 $\forall\lambda\geqslant 0$，$g\in\mathscr{D}(\Omega)$，有

$$\|(I-\lambda\Omega)(f_n+\lambda g)\|\geqslant\|f_n+\lambda g\|,$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$\|\lambda g-\lambda h-\lambda^2\Omega g\|\geqslant\|\lambda g\|.$$

对此式两边同除以 λ，并令 $\lambda\searrow 0$ 即得

$$\|g-h\|\geqslant\|g\|.$$

由于 $g\in\mathscr{D}(\Omega)$ 任意且 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $C_b(X)$ 中稠，故在上式中可取 $g=h$，于是即得 $h=0$，从而 $\bar\Omega$ 存在.

(ii) 由于 $\mathscr{D}(\bar\Omega)\supset\mathscr{D}(\Omega)$，(2.1)，(2.3) 成立. 今往证：$\bar\Omega$ 具有性质(2.2).

设 $f\in\mathscr{D}(\bar\Omega)$，若 $f\in\mathscr{D}(\Omega)$，则无需再证. 若 $f\in\mathscr{D}(\bar\Omega)\setminus\mathscr{D}(\Omega)$，则由 §2 第 4 目知 $\exists\{f_n\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$ 使 $f_n\to f$，$\Omega_n f\to\bar\Omega f$. 令

$$g_n \triangleq f_n - \lambda\Omega f_n,$$

则由引理 2 的(2.2)得$\min\{f_n(\eta):\eta\in X\}\geqslant\min\{g_n(\eta):\eta\in X\}$. 但 $g_n\to g\triangleq f-\lambda\bar{\Omega}f\in C_b(X)$, 令 $n\to\infty$, 即得

$$\min\{f(\eta):\eta\in X\}\geqslant\min\{g(\eta):\eta\in X\}$$
$$=\min\{f(\eta)-\lambda\bar{\Omega}f(\eta):\eta\in X\}.$$

此即性质(2.2). 由引理 2 的注知 $\bar{\Omega}$ 具有性质(2.4).

(iii) 最后证: $\forall\lambda>0$, $\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})$ 是 $C_b(X)$ 中的闭集.

设 $g_n\in\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})$ 且 $g_n\to g$. 则 $\exists f_n\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ 使

(3.2) $$f_n-\lambda\bar{\Omega}f_n=g_n.$$

又由 $\bar{\Omega}$ 具有性质(2.2),(2.4)知

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|g_n-g_m\|\to 0\ \ (m,n\to\infty).$$

于是 $\exists f\in C_b(X)$ 使 $f_n\to f$, 因而 $\bar{\Omega}f_n=\lambda^{-1}(f_n-g_n)$ 收敛. 故由 $\bar{\Omega}$ 是闭算子知 $f\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$, 且 $\bar{\Omega}f_n\to\bar{\Omega}f$, 于是在 (3.2) 中令 $n\to\infty$ 即得

$$g=f-\lambda\bar{\Omega}f\in\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega}).$$

即 $\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})$ 是 $C_b(X)$ 中的闭集. 至于

$$\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})=\overline{\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)}$$

用前述手法不难证明. □

4. 为了证明 $\mathscr{R}(I-\lambda\bar{\Omega})\supset\mathscr{D}(X)$, 需要对函数的平滑性(即 $\Delta_f(u)$, $|||f|||$) 作些估计. 为了大致理解这些估计(下面引理 5,6 的结果)的作用. 我们还进一步概述一下定理 2.5(i) 的证明方法. 首先让 Ω 被一列有界的具有性质 (2.1)—(2.3) 的算子 $\Omega^{(n)}$ 逼近. 而 $\forall\lambda\in(0,\|\Omega^{(n)}\|^{-1})$ 自动地有

(4.1) $$\mathscr{R}(I-\lambda\Omega^{(n)})=C_b(X),$$

事实上, $\forall g\in C_b(X)$,

$$f\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(\Omega^{(n)})^k g\in C_b(X)$$

满足 $f-\lambda\Omega^{(n)}f=g$. 进而由引理1.3及(2.4),对任何 $\lambda>0$ (4.1)

成立．因此任取 $g\in\mathscr{D}(X)$，$\forall n\geqslant 1$，$\lambda>0$，$\exists f_n\in C_b(X)$ 使 $f_n-\lambda\Omega^{(n)}f_n=g$．那么所作出的估计(引理6，7)使得对充分小的 λ，f_n 对 n 一致地平滑．令 $g_n\triangleq f_n-\lambda\Omega f_n$，应用关于 f_n 的平滑性的估计可得

$$\|g_n-g\|=\lambda\|(\Omega-\Omega^{(n)})f_n\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

于是

$$\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)=\overline{\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)}\supset\mathscr{D}(X)$$

从 $g_n\in\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)$，$n\geqslant 1$，得出．

5.引理 设(2.3.1)满足，则

(i) 设 $f\in\mathscr{D}(X)$，$\lambda\geqslant 0$，且 $g\triangleq f-\lambda\Omega f$，则 $\forall u\in S$，有

$$(5.1)\qquad \Delta_f(u)(1+\lambda\varepsilon)\leqslant\Delta_g(u)+\lambda\sum_{x\neq u}\gamma(x,u)\Delta_f(x)$$

其中 $\Delta_f(u),\varepsilon,\gamma(x,u)$ 分别由(2.2.7)，(2.4.6)，(2.4.2)定义．

(ii) 若还进一步假设 $\sum_{A\in\mathscr{S}}c_A<\infty$ 以使 Ω 扩张成 $C_b(X)$ 上的有界算子，则断语(i)对任何 $f\in C_b(X)$ 成立，其中 c_A 由(2.2.9)定义．

证． 1°(i) ⇒ (ii)．由 Ω 的定义(2.2.6)，(2.3.3)，命题 2.3 知 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$，$\Omega f\in C_b(X)$且

$$\|\Omega f\|\leqslant\sum_{A\in\mathscr{S}}\left\|\int c(A,\cdot,d\zeta)[f(\zeta\times(\cdot)_{S\setminus A})-f]\right\|$$

$$\leqslant 2\|f\|\sum_{A\in\mathscr{S}}c_A$$

再由 $\sum_{A\in\mathscr{S}}c_A<\infty$ 及 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $C_b(X)$ 中稠知 Ω 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上有界且可扩张到 $C_b(X)$上，而且 $\forall f\in C_b(X)$，$\exists\{f_n\}\subset\mathscr{D}(\Omega)$，$f_n\to f$，$g_n\triangleq f_n-\lambda\Omega f_n\to g\triangleq f-\lambda\Omega f$．由(i)知(5.1)对 $f=f_n$，$g=g_n$ 成立，所以(5.1)对 $f\in C_b(X)$，$g=f-\lambda\Omega f$ 也成立．

2° 再证(i) 给定 $u\in S$，

$$\Delta_f(u) = \sup\{|f(\xi \times \tilde{\eta}_{S\setminus u}) - f(\tilde{\eta})| : \xi \in Y, \tilde{\eta} \in X\},$$

而 $f(\xi \times \tilde{\eta}_{S\setminus u}) - f(\tilde{\eta})$ 是 $(\xi, \tilde{\eta}) \in Y \times X$ 上的连续函数，$Y \times X$ 是紧距离空间。所以 $\exists(\zeta, \eta) \in Y \times X$ 使

$$f(\zeta \times \eta_{S\setminus u}) - f(\eta) = \Delta_f(u), \tag{5.2}$$

从而由 $f - \lambda Qf = g$ 知

$$\Delta_f(u) = g(\zeta \times \eta_{S\setminus u}) - g(\eta) + \lambda(Qf)(\zeta \times \eta_{S\setminus u}) - \lambda(Qf)(\eta), \tag{5.3}$$

因此要证 (i)，在于估计上式后两项之差。

先取 $\Lambda \in \mathscr{S}$，$\Lambda \ni u$，则 $\forall \xi \in X(\Lambda)$ 由 (5.2)

$$f(\zeta \times \xi \times \eta_{S\setminus(\Lambda\cup u)}) - f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) \leqslant f(\zeta \times \eta_{S\setminus u}) - f(\eta), \tag{5.4}$$

于是由(5.4)、(2.4.1)及命题 2.3 证 (ii) 的第一段即得

$$\begin{aligned} &\int c(\Lambda, \zeta \times \eta_{S\setminus\Lambda}, d\xi)[f(\zeta \times \xi \times \eta_{S\setminus(\Lambda\cup u)}) - f(\zeta \times \eta_{S\setminus u})] \\ &\quad - \int c(\Lambda, \eta, d\xi)[f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) - f(\eta)] \\ &\leqslant \int [c(\Lambda, \zeta \times \eta_{S\setminus\Lambda}, d\xi) - c(\Lambda, \eta, d\xi)] \cdot [f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) \\ &\quad - f(\eta)] \leqslant c_\Lambda(u) \sum_{x \in \Lambda} \Delta_f(x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于 $\Lambda \in \mathscr{S}$，$u \in \Lambda$ 的情形，则 $\forall \xi \in X(\Lambda)$，令

$$h(\xi) \triangleq f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) - f(\{\xi(u)\} \times \eta_{S\setminus u})$$

则仿命题 2.3 证 (ii) 的第一段可得

$$\sup_{\xi \in X(\Lambda)} |h(\xi)| \leqslant \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq u}} \Delta_f(x).$$

而且由 h 的定义及上式知

$$\begin{aligned} &\int c(\Lambda, \zeta \times \eta_{S\setminus u}, d\xi)[f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) - f(\zeta \times \eta_{S\setminus u})] \\ &\quad - \int c(\Lambda, \eta, d\xi)[f(\xi \times \eta_{S\setminus\Lambda}) - f(\eta)] \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$= \int c(\Lambda,\zeta\times\eta_{S\setminus u},d\xi)h(\xi) - \int c(\Lambda,\eta,d\xi)h(\xi)$$

$$+ \int c(\Lambda,\zeta\times\eta_{S\setminus u},d\xi)[f(\xi(u)\times\eta_{S\setminus u}) - f(\zeta\times\eta_{S\setminus u})]$$

$$- \int c(\Lambda,\eta,d\xi)[f(\xi(u)\times\eta_{S\setminus u}) - f(\eta)]$$

$$\leqslant c_\Lambda(u)\sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x\neq u}}\Delta_f(x)$$

$$- [f(\zeta\times\eta_{S\setminus u}) - f(\eta)][c(\Lambda,\zeta\times\eta_{S\setminus u},\{\xi:\xi(u)$$

$$= \eta(u)\}) + c(\Lambda,\eta,\{\xi:\xi(u)=\zeta\})],$$

其中最后一步用到

$$f(\eta)\leqslant f(\xi(u)\times\eta_{S\setminus u})\leqslant f(\zeta\times\eta_{S\setminus u}),$$

这是(5.2)的推论。由(5.5)、(5.6)、(5.2)即得

$$\Delta_f(u)\leqslant\Delta_g(u) + \lambda\sum_{\Lambda\in\mathscr{S}}c_\Lambda(u)\sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x\neq u}}\Delta_f(x) - \lambda\Delta_f(u)\varepsilon$$

$$= \Delta_g(u) + \lambda\sum_{u\neq x\in S}\Delta_f(x)\sum_{x\in\Lambda}c_\Lambda(u) - \lambda\varepsilon\Delta_f(u).$$

由 $r(x,u)$ 的定义(2.4.2)知

$$(1+\lambda\varepsilon)\Delta_f(u)\leqslant\Delta_g(u) + \lambda\sum_x r(x,u)\Delta_f(x).$$

由于 u 可任意取定，故(i)获证。□

6. 引理 设(2.3.1)及(2.5.1)满足，则

(i) $(\Gamma\beta)(u)\triangleq\sum_x\beta(x)r(x,u)$，$u\in S$，为 B- 空间

$$l_1(S)\triangleq\{\beta:S\to R^1,\ \|\beta\|_{l_1}=\sum_{x\in S}|\beta(x)|<\infty\}$$

上的一个具有范数M的有界正算子(正算子是指若 $\beta\in l_1(S)$ 为正函数。则 $\Gamma\beta$ 亦然)。

(ii) 若 f，$g\in\mathscr{D}(X)$，$f-\lambda\Omega f=g$，且 $\lambda\geqslant 0$ 满足条件

$\lambda M/(1+\lambda\varepsilon)<1$，则

(6.1) $$\Delta_f \leqslant [(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g,$$

其中(6.1)的含义是：将 Δ_f,Δ_g 看作 $l_1(S)$ 的元(因而(6.1)的右边也是 $l_1(S)$ 的元)逐点的值满足不等式。

证. 先证(i)：显然Γ是正算子. $\forall\beta\in l_1(S)$，由 M 的定义(2.4.5)知

$$\|\Gamma\beta\|_{l_1}=\sum_u(\Gamma\beta)(u)\leqslant\sum_u\sum_x|\beta(x)|\gamma(x,u)$$

$$\leqslant M\sum_x|\beta(x)=M\|\beta\|_{l_1},$$

因而 $\|\Gamma\|\leqslant M$. 为证此等式成立,任取 $v\in S$，并令

$$e_v:\quad e_v(x)=\delta_{vx}=\begin{cases}1, & x=v,\\ 0, & x\neq v.\end{cases}$$

则 $\|e_v\|_{l_1}=1$，且

$$\|\Gamma e_v\|_{l_1}=\sum_u(\Gamma e_v)(u)=\sum_u\sum_x e_v(x)\gamma(x,u)$$

$$=\sum_u\gamma(v,u).$$

于是

$$M=\sup_v\|\Gamma e_v\|_{l_1}\leqslant\sup_v\|\Gamma\|\cdot\|e_v\|_{l_1}=\|\Gamma\|.$$

故(i)获证。

再证(ii). 由Γ的定义(5.1)可写成

$$\Delta_f\leqslant(1+\lambda\varepsilon)^{-1}\Delta_g+(1+\lambda\varepsilon)^{-1}\lambda\Gamma\Delta_f.$$

因为Γ是正算子且 $\forall f,g\in\mathscr{D}(X)$，

$$\sum_u\Delta_f(u)<\infty,\ \sum_u\Delta_g(u)<\infty,$$

因而 $\Delta_f,\Delta_g\in l_1(S)$ 故上述关系可以迭代,于是得到

$$\Delta_f\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{(1+\lambda\varepsilon)^{k+1}}\Gamma^k\Delta_g+\frac{\lambda^n}{(1+\lambda\varepsilon)^n}\Gamma^n\Delta_f.$$

因为 $\lambda M(1+\lambda\varepsilon)^{-1}<1$，所以由 (i) 及

$$|||f|||=\sum_u \Delta_f(u)<\infty$$

得

$$\left\|\frac{\lambda^n}{(1+\lambda\varepsilon)^n}\Gamma^n\Delta_f\right\|_{l_1}\leqslant\left(\frac{\lambda M}{1+\lambda\varepsilon}\right)^n|||f|||\to 0\quad(n\to\infty)$$

故

$$\Delta_f\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(1+\lambda\varepsilon)^{k+1}}\Gamma^k\Delta_g=[(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g,$$

其中最后一个等式可用两边同乘以 $(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma$ 的办法来验证.□

7. 定理 2.5 的证明 由于 $\bar{\Omega}|_{\mathscr{D}(X)}=\Omega$,所以 (ii) 显然. (iii) 即引理 6(i). 因此只需证明 (i),(iv),(v). 而关键的步骤在于证明: $\forall\lambda>0$ 充分小, $\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)$ 在 $C_b(X)$ 中稠.

1° 取 $\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S}$, $\Lambda_n\uparrow S(n\to\infty)$, 且令

$$C^{(n)}(\Lambda,\eta,\cdot)\triangleq\begin{cases}c(\Lambda,\eta,\cdot), & \Lambda\subset\Lambda_n,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\eta\in X$, $A\in\mathscr{F}_0(\Lambda)$, 有 $c^{(n)}(\Lambda,\eta,A)\leqslant c(\Lambda,\eta,A)$; $\forall u,x\in S$, $\gamma^{(n)}(x,u)\leqslant\gamma(x,u)$ 且 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$

$$\Omega^{(n)}f\to\Omega f\ (n\to\infty).$$

而且还有

$$\sum_\Lambda c_\Lambda^{(n)}=\sum_{\Lambda\subset\Lambda_n}c_\Lambda<\infty \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x,u}\gamma^{(n)}(x,u)&=\sum_{\substack{x,u\\x\neq u}}\sum_{x\in\Lambda\subset\Lambda_n}c_\Lambda(u)\\&=\sum_{\Lambda\subset\Lambda_n}|\Lambda|\sum_u c_\Lambda(u)<\infty.\end{aligned} \tag{7.2}$$

由(7.1)引理 5(ii) 知 $\Omega^{(n)}$ 可以扩张成 $C_b(X)$ 上的有界算子,

仍记作 $\Omega^{(n)}$，因而它是闭算子，具有性质(2.1)，(2.2)，(2.3)。还有 $\forall\lambda\in(0,\|\Omega^{(n)}\|^{-1})$，$g\in C_b(X)$，则

$$f\triangleq\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m(\Omega^{(n)})^m g\in C_b(X),$$

两边乘以 $(I-\lambda\Omega^{(n)})$ 即得 $(I-\lambda\Omega^{(n)})f=g$，故得 $\forall\lambda\in(0,\|\Omega^{(n)}\|^{-1})$

$$\mathscr{R}(I-\lambda\Omega^{(n)})=C_b(X)\quad n\geqslant 1 \tag{7.3}$$

由引理 1.3 知(7.3) $\forall\lambda\in[0,\infty)$ 成立。

给定 $g\in\mathscr{D}(X)$，$\lambda>0$，则由(7.3) $\forall n\geqslant 1$，$\exists f_n\in C_b(X)$ 使

$$f_n-\lambda\Omega^{(n)}f_n=g. \tag{7.4}$$

注意此时 $\varepsilon_n=0$，由引理 5(ii) 即得

$$\Delta_{f_n}(u)\leqslant\Delta_g(u)+\lambda\sum_x\gamma^{(n)}(x,u)\Delta_{f_n}(x) \tag{7.5}$$

由 $g\in\mathscr{D}(X)$，$\sup\limits_x\Delta_{f_n}(x)\leqslant 2\|f_n\|<\infty$ 及(7.2)得

$$|||f_n|||\leqslant|||g|||+2\lambda\|f_n\|\sum_{u,x}\gamma^{(n)}(x,u)<\infty,$$

即 $f_n\in\mathscr{D}(X)$。因而可定义

$$g_n\triangleq f_n-\lambda\Omega f_n\in\mathscr{R}(I-\lambda\Omega) \tag{7.6}$$

于是若能证明：$g_n\to g$，则 $\mathscr{D}(X)\subset\overline{\mathscr{R}(I-\lambda\Omega)}$。下面我们来证明这一点。

2° 取 $\lambda<M^{-1}$，则 $\|\lambda\Gamma^{(n)}\|\leqslant\|\lambda\Gamma\|=\lambda M<1$，将引理 6 应用于 $\Omega^{(n)}$，并注意 $\varepsilon_n=0$ 即得 $\forall n\geqslant 1$ 有

$$\Delta_{f_n}\leqslant(I-\lambda\Gamma^{(n)})^{-1}\Delta_g.$$

再由 $\gamma^{(n)}(x,u)\leqslant\gamma(x,u)$ 知 $\forall u\in S$，$\forall m\geqslant 1$，$((\Gamma^{(n)})^m\Delta_g)(u)\leqslant(\Gamma^m\Delta_g)(u)$，因而

$$(I-\lambda\Gamma^{(n)})^{-1}\Delta_g(u)=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda\Gamma^{(n)})^m\Delta_g(u)$$

$$\leqslant (I - \lambda\Gamma)^{-1}\Delta_g(u).$$

故

(7.7) $$\Delta_{f_n} \leqslant (I - \lambda\Gamma)^{-1}\Delta_g, \quad \forall n \geqslant 1.$$

于是由 (7.6),(7.4),(2.3.7),(7.7)

$$\|g - g_n\| = \lambda\|(\Omega - \Omega^{(n)})f_n\|$$

$$= \lambda\left\|\sum_{\Lambda\not\subset\Lambda_n}\int c(\Lambda, \cdot, d\zeta)[f_n(\zeta \times (\cdot)_{S\setminus\Lambda}) - f]\right\|$$

(7.8) $$\leqslant \lambda \sum_{\Lambda\not\subset\Lambda_n} c_\Lambda \sum_{x\in\Lambda}\Delta_{f_n}(x)$$

$$\leqslant \lambda \sum_{\Lambda\not\subset\Lambda_n} c_\Lambda \sum_{x\in\Lambda}[I - \lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g(x)$$

$$\leqslant \lambda \sum_x ([I - \lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g)(x) \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ \Lambda\not\subset\Lambda_n}} c_\Lambda \to 0, \quad (n \to \infty),$$

最后一步是由于

$$\sum_{x\in\Lambda\subset\Lambda_n} c_\Lambda \nearrow \sum_{x\in\Lambda} c_\Lambda < \infty,$$

$$\sum_x ([I - \lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g)(x) < \infty,$$

$$\sum_{\substack{x\in\Lambda \\ \Lambda\not\subset\Lambda_n}} c_\Lambda < \sup_x \sum_{\Lambda\ni x} c_\Lambda < \infty$$

及控制收敛定理得到.由(7.8)及 $g_n \in \mathscr{R}(I - \lambda\Omega)$ 知

$$g \in \overline{\mathscr{R}(I - \lambda\Omega)}$$

从而

$$\mathscr{R}(I - \lambda\bar{\Omega}) = \overline{\mathscr{R}(I - \lambda\Omega)} \supset \mathscr{D}(X).$$

由 $\mathscr{D}(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠即得

(7.9) $$\forall\lambda \in (0, M^{-1}), \quad \mathscr{R}(I - \lambda\bar{\Omega}) = C_b(X),$$

此即 $\bar{\Omega}$ 满足条件 (1.2.2). 结合引理 3 的结论即证明了定理 2.5 (i).

3° 为了证明定理 2.5(iv)．设 $g\in\mathscr{D}(X)$，f_n，g_n 由（7.4)，(7.6)定义。则由（7.8）知当 $\lambda\in[0,M^{-1})$ 时，$g_n\to g$，因而由(1.1.3)(即(2.4))，(7.6)知当 $n,m\to\infty$ 时，

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|(f_n-f_m)-\lambda\Omega(f_n-f_m)\|=\|g_n-g_m\|\to 0,$$

于是 $\exists f\in C_b(X)$ 使 $f_n\to f$．再由（7.6）知 Ωf_n 收敛，因此 $f\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$，且 $\Omega f_n\to\bar{\Omega}f$．在(7.6)，(7.7)中令 $n\to\infty$，即得当 $\lambda\in[0,M^{-1})$ 时，

$$(7.9)\qquad \begin{cases}g=f-\lambda\bar{\Omega}f\\ \Delta_f\leqslant(I-\lambda\Gamma)^{-1}\Delta_g.\end{cases}$$

从而 $f\in\mathscr{D}(X)$．故得

$$(7.10)\qquad \forall\lambda\in[0,M^{-1}),\ (I-\lambda\bar{\Omega})^{-1}\mathscr{D}(X)\subset\mathscr{D}(X).$$

设 $\lambda\in[0,M^{-1})$，$g\in\mathscr{D}(X)$，则 $f\triangleq(I-\lambda\bar{\Omega})^{-1}g\in\mathscr{D}(X)$，于是

$$g=f-\lambda\bar{\Omega}f=f-\lambda\Omega f.$$

又因 $\lambda M<1$ 导出 $\lambda M(1+\lambda\varepsilon)^{-1}<1$，所以由引理 6(ii) 知

$$(7.11)\qquad \forall\lambda\in[0,M^{-1}),\ g\in\mathscr{D}(X),$$

$$\Delta_{(I-\lambda\Omega)^{-1}g}\leqslant[(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-1}\Delta_g.$$

由于(7.10)及 $[(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-1}$ 是正算子，(7.11)可以迭代，于是得到：

$$(7.12)\qquad \forall\lambda\in[0,M^{-1}),\ g\in\mathscr{D}(X),\ n\geqslant 1,$$

$$\Delta_{(I-\lambda\Omega)^{-n}g}\leqslant[(1+a\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-n}\Delta_g.$$

$\forall t\geqslant 0$，令 $\lambda=\dfrac{t}{n}$，则当 n 充分大时，$\lambda\in[0,M^{-1})$，因而(7.12)中的不等式成立。令 $n\to\infty$，则由 (i) 及(1.1.4)得

$$(7.13)\ \begin{cases}\Delta_{(I-(t/n)\Omega)^{-n}g}(u)\to\Delta_{S(t)g}(u),u\in S,\quad(n\to\infty)\\ [(1+\lambda\varepsilon)I-\lambda\Gamma]^{-n}\Delta_g\xrightarrow{l_1(S)}e^{(\Gamma-\varepsilon I)t}\Delta_g\quad(n\to\infty)\end{cases}$$

后一等式还用到 $\Gamma-\varepsilon I$ 是 $l_1(S)$ 上的有界算子，习题 2 及

由 $$\left.\frac{d[e^{(\Gamma-\varepsilon I)t}\beta]}{dt}\right|_{t=0}=(\Gamma-\varepsilon I)_\beta,\quad \beta\in l_1(S)$$

等事实。于是由(7.12),(7.13)得到

(7.14) $\forall t\geqslant 0, g\in\mathscr{D}(X), \Delta_{S(t)g}\leqslant e^{-\varepsilon t}\exp(t\Gamma)\Delta_g$.

此即定理 2.5(iv).

4° 至于定理 2.5(v) 的证明如下：由(7.14)及 $\|\Gamma\|=M$ 知若 $g\in\mathscr{D}(X)$，则 $\Delta_g\in l_1(S)$，从而 $\Delta_{S(t)g}\in l_1(S)$，故 $S(t)g\in\mathscr{D}(X)$. 还有 $\|\exp(t\Gamma)\|\leqslant e^{tM}$，于是由(7.14)得

$$\begin{aligned}|||S(t)g|||&=\sum_u\Delta_{S(t)g}(u)=\|\Delta_{S(t)g}\|_{l_1}\\&\leqslant e^{-\varepsilon t}\|\exp(t\Gamma)\|\cdot\|\Delta_g\|_{l_1}=e^{(M-\varepsilon)t}|||g|||.\end{aligned}$$

至此定理 2.5 全部获证. □

§4 存在定理对遍历性的应用

本节将应用存在定理（定理 2.5）的结论(v)得到无穷粒子系统的马尔可夫过程遍历的一个充分条件。为此我们先介绍马氏半群的不变测度(平稳分平)及遍历的概念，并顺便讨论不变测度的一些初等性质。

1. 定义 设X为一紧距离空间，$\{S(t): t\geqslant 0\}$ 是 $C_b(X)$ 上的一个马氏半群. 设 $\mu\in\mathscr{P}(X)$(表X的 Borelσ- 域 $\mathscr{B}_X=\mathscr{F}$ 上的全体概率测度集，$\forall t\in[0,\infty)$，定义

(1.1) $\mu S(t)\in\mathscr{P}(X)$: $\int_X f d[\mu S(t)]\triangleq\int_X S(t)f d\mu,\ f\in C_b(X)$.

若 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 满足

(1.2) $$\mu S(t)=\mu,\quad \forall t\geqslant 0,$$

则称μ为 $\{S(t): t\geqslant 0\}$ 的不变测度. 记

(1.3) $\mathscr{I} \triangleq \{\mu \in \mathscr{P}(X): \mu S(t) = \mu, t \geqslant 0\}$,

并称$\mathscr{I}$为 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的不变测度集.

关于不变测度的概念,本来可以更广地定义,即只要μ是X上的测度(甚至不必有限),由(1.1)的等式定义的 $\mu S(t)$(不必$\in \mathscr{P}(X)$)满足(1.2)就可称为 $S(t)$ 的不变测度.由于本书只对 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 的情形感兴趣,所以如上定义不变测度.

由§1知,对于X上的马尔可夫半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$,有转移函数 $p(t,\eta,A), t \geqslant 0, \eta \in X, A \in \mathscr{F}$,与之对应,因而有以$X$为态空间、以 $p(t,\eta,A)$ 为转移函数以马尔可夫过程 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\}, \{P_\eta: \eta \in X\})$ 与之对应. 因此 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的不变测度也称为 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\}, \{P_\eta: \eta \in X\})$ 的**平稳分布**. 如此命名是由于以下的原因.

设马氏半群$\{S(t): t \geqslant 0\}$所对应的转移函数为 $p(t, \eta, A)$. 则由(1.1)及定理1.2立得

(1.4) $\forall t \geqslant 0$, $A \in \mathscr{F}$, $\mu S(t)(A) = \int p(t,\eta,A)\mu(d\eta)$.

当相应的过程 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\}, \{P_\eta: \eta \in X\})$ 以 $\mu \in \mathscr{I}$ 为初始分布时,则 $\{\eta_t: t \geqslant 0\}$的分布为 $P(\cdot) = \int P_\eta(\cdot)\mu(d\eta) \in \mathscr{P}(X^{[0,\infty)})$,

(1.5) $\forall t \geqslant 0$, $A \in \mathscr{F}$, $P(\eta_t \in A) = \int P(t,\eta,A)\mu(d\eta)$

$$= \mu S(t)(A) = \mu(A),$$

即过程在每一时刻 $t \geqslant 0$ 的分布都与初始分布μ相同. 不仅如此,还可以证明: $\forall n \in Z_+$, $\forall t, t_k \in [0,\infty)$, $k = 0,1,\cdots,n$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $\forall A_k \in \mathscr{F}$, $k = 0,1,\cdots,n$, 有

(1.6) $P(\eta_{t_0} \in A_0, \cdots, \eta_{t_n} \in A_n) = P(\eta_{t_0+t} \in A_0, \cdots, \eta_{t_n+t} \in A_n)$,

即当过程 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\}, \{P_\eta: \eta \in X\})$ 以 $\mu \in \mathscr{I}$ 为初始分布时,则此过程为一(严)**平稳过程**. 这个性质的证明留给读者.

半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的$\mathscr{I}$可以用它的无穷小母元来刻划,即

2. 命题 设马氏半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的无穷小母元为 Ω，$\mathscr{I}$ 是它的不变测度集，则

(i) $\mu \in \mathscr{I}$ 当且仅当 $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$ 有

$$\int \Omega f d\mu = 0. \tag{2.1}$$

(ii) 若 D 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的线性子空间，且 $\overline{\Omega|_D} = \Omega$，则称 D 是 Ω 的**核**。若 D 是 Ω 的核，则，$\mu \in \mathscr{I}$ 当且仅当 $\forall f \in D$，(2.1)成立，

证. (ii) 由(i) 及算子的闭包的定义立刻得到，因此只需证(i)。

若 $\mu \in \mathscr{I}$，则由(1.1.5)，(1.1)及(1.2)知 $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$，

$$\int \Omega f d\mu = \lim_{t \to 0} \int (S(t)f - f)t^{-1} d\mu$$

$$= \lim_{t \to 0} t^{-1}\left[\int f d[\mu S(t)] - \int f d\mu\right] = 0$$

反之，若 $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$，(2.1) 成立，则由定理 1.2 知 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall \lambda \in [0,\delta]$，$f \in C_b(X)$，$\exists g \in \mathscr{D}(\Omega)$ 使 $(I - \lambda\Omega)g = f$。 于是由(2.1)得知

$$\int (I - \lambda\Omega)^{-1} f d\mu = \int g d\mu = \int (I - \lambda\Omega) g d\mu$$

$$= \int f d\mu.$$

$\forall t > 0$，当 $n > t/\delta$ 时，$\lambda \triangleq \frac{t}{n} < \delta$，反复应用上式即得

$$\int \left(I - \frac{t}{n}\Omega\right)^{-n} f d\mu = \int f d\mu. \tag{2.2}$$

令 $n \to \infty$，由定理 1.1 的 (1.1.4) 即得 $\int S(t) f d\mu = \int f d\mu$。

因而由(1.1)即得 $\mu \in \mathscr{I}$ ·□

3. 命题 对 $\mathscr{P}(X)$ 的弱收敛拓扑来说，马氏半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的 $\mathscr{I}$ 是非空闭凸集。

证. 由 (1.2) 知 $\mathscr{I}$ 是凸集，即 $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathscr{I}$. $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \in \mathscr{I}$. 设 $\mu_n \in \mathscr{I}$, $\mu_n \Rightarrow \mu \in \mathscr{P}(X)$, (弱收敛, Ω 是 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的无穷小母元，则 $\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$, 有 $\Omega f \in C_b(X)$, 于是由命题 2(1) 及附录定理 3.1 得

$$\int \Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \Omega f d\mu_n = 0,$$

再由命题 2(i) 的充分性部分即得 $\mu \in \mathscr{I}$. 故 $\mathscr{I}$ 是闭集，最后往证: $\mathscr{I} \neq \phi$.

为此首先注意: 因为 X 是紧距离空间，$\mathscr{P}(X)$ 按弱收敛拓扑也是紧距离空间，其次 $\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$, $t > 0$, 定义

$$(3.1) \qquad t^{-1}\int_0^t \mu S(s) ds \triangleq \lim_{\sup|\Delta s_k|\to 0} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{m-1} \mu S(s_k)\Delta s_k, \in \mathscr{P}(X)$$

其中 lim 表示测度的弱收敛极限，$s_0 \triangleq 0 < s_1 < \cdots < s_m \triangleq t$ 为 $[0, t]$ 的任一个分划，$\Delta s_k \triangleq s_{k+1} - s_k$. 定义 (3.1) 的合理性是由于

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{m-1} \mu S(s_k)\Delta s_k \in \mathscr{P}(X),$$

且 $\forall f \in C_b(X)$ 有

$$\lim_{\sup|\Delta s_k|\to 0} \int f d\left[\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{m-1} \mu S(s_k)\Delta s_k\right]$$

$$(3.2) \qquad = \lim_{\sup|\Delta s_k|\to 0} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int S(s_k) f d\mu\right)\Delta s_k$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int S(s) f d\mu\right) ds = \nu(f). \quad (\text{记})$$

则 $\nu(f)$ 是 $C_b(X)$ 上的一个正有界泛函且 $\nu(1) = 1$, 于是由黎斯 (Riesz) 表现定理知有一唯一的 $\nu \in \mathscr{P}(X)$ 使

$$(3.3)\qquad \nu(f)=\int f d\nu$$

由(3.2)及弱收敛判别条件(附录定理 3.1)知(3.1)的定义合理，即(3.3)中的ν。而且由(3.1),(3.2),(3.3)得到

$$(3.4)\qquad \forall f\in C_b(X),$$

$$\int f d\left[t^{-1}\int_0^t \mu S(s)ds\right]=\frac{1}{t}\int_0^t\left[\int S(s)fd\mu\right]ds$$

于是由上述讨论知：$\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$

$$\left\{t^{-1}\int_0^t \mu S(s)ds:\ t>0\right\}\subset\mathscr{P}(X)$$

有一弱收敛子序列 $t_n^{-1}\int_0^{t_n}\mu S(s)ds,\ t_n\uparrow\infty$. 设其弱收敛极限为$\bar{\nu}$。今往证：$\bar{\nu}\in\mathscr{I}$. 事实上，$\forall f\in C_b(X)$, $s>0$，由(3.4)

$$\int S(s)fd\bar{\nu}=\lim_{n\to\infty}\int S(s)fd\left[t_n^{-1}\int_0^{t_n}\mu S(t)dt\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}t_n^{-1}\int_0^{t_n}\left[\int S(s+t)fd\mu\right]dt$$

$$(3.5)\qquad =\lim_{n\to\infty}t_n^{-1}\int_s^{t_n+s}\left[\int S(t)fd\mu\right]dt$$

而

$$\left|\int_s^{t_n+s}\left[\int S(t)fd\mu\right]dt-\int_0^{t_n}\left[\int S(t)fd\mu\right]dt\right|$$

$$(3.6)\qquad \leqslant\left|\int_0^s\left[\int S(t)fd\mu\right]dt\right|+\left|\int_{t_n}^{t_n+s}\left[\int S(t)fd\mu\right]dt\right|$$

$$\leqslant 2s\|f\|,$$

于是由(3.5),(3.6),(3.4)

$$\int S(s)fd\nu=\lim_{n\to\infty}t_n^{-1}\int_0^{t_n}\left[\int S(t)fd\mu\right]dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int fd\left[t_n^{-1}\int_0^{t_n}\mu S(t)dt\right]=\int fd\nu$$

由(1.1)即知 $\nu\in\mathscr{I}$，故 $\mathscr{I}\neq\phi$ ·□

下面的定理是应用定理 2.5 得出的无穷粒子系统马尔可夫过程遍历的一个充分条件。先给出过程遍历的定义

4. 定义 称具有半群 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 的马尔可夫过程是**遍历**的，如果它的不变测度集 $\mathscr{I}$ 满足

(4.1) $\mathscr{I}=\{\nu\}$ 是单元集；

(4.2) $\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$, $\mu S(t) \Rightarrow \nu$.

5. 定理 设 $(\{\eta_t: t \geqslant 0\}, \{P_\eta: \eta \in X\})$ 是定理 2.5 决定的无穷粒子系统马尔可夫过程，$\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是它的半群，并采用 §2 第 1 至第 5 目的记号与假设。

若 $M<\varepsilon$，则过程遍历．而且 $\forall g \in \mathscr{D}(X)$,

$$
(5.1)\quad \forall s \geqslant 0 \quad \left\|S(s) g-\int g d \nu\right\| \leqslant\left(\sup _{x \in S} \sum_{A \ni x} c_A\right) \cdot \frac{\exp [-(\varepsilon-M) s]}{\varepsilon-M}|||g|||,
$$

其中 ν 为 $\mathscr{I}$ 的唯一元。

证. 取定 $t>s>0$, $g \in \mathscr{D}(X)$，则由定理 2.5(v) 知 $\forall r \in [s, t]$, $S(r) g \in \mathscr{D}(X)$，再由(1.1.6)即得

$$
(5.1)\quad S(t) g-S(s) g=\int_s^t \Omega S(r) g d r .
$$

而应用命题 2.3 及定理 2.5(v) 得

$$
\|\Omega S(r) g\| \leqslant\left(\sup _{u \in S} \sum_{A \ni u} c_A\right)|||S(r) g|||
$$

$$
(5.2)\quad \leqslant\left(\sup _{u \in S} \sum_{A \ni u} c_A\right) e^{-(\varepsilon-M) r}|||g|||
$$

故由(5.1),(5.2)得

$$
(5.3)\quad \forall t \geqslant s \geqslant 0 \quad \|S(t) g-S(s) g\| \leqslant\left(\sup _{u \in S} \sum_{A \ni u} c_A\right) \cdot \frac{e^{-(\varepsilon-M) s}}{\varepsilon-M}|||g|||.
$$

因而由$M<\varepsilon$得知

$$f \triangleq \lim_{t\to\infty} S(t)g \quad 存在。$$

于是$\forall u \in S$，由定理2.5(v)知

$$\Delta_f(u) = \lim_{t\to\infty} \Delta_{S(t)g}(u) \leqslant \lim_{t\to\infty} |||S(t)g|||$$

$$\leqslant \lim_{t\to 0} e^{-(\varepsilon - M)t} \cdot |||g||| = 0$$

从而$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\zeta \in X(\Lambda)$，$\eta \in X$，$f(\eta \times \eta_{S\setminus\Lambda}) = f(\eta)$。由

$$\bigcup_{\Lambda \in \mathscr{S}} X(\Lambda) \times \{\eta_{S\setminus\Lambda}\}$$

在X中稠及$f \in C_b(X)$知f必为常数。

任取$\nu \in \mathscr{I}$（由命题4知ν是存在的），则$\forall t \geqslant 0$

$$\int g d\nu = \int S(t) g d\mu = \lim_{t\to\infty} \int S(t) g d\mu = \lim S(t) g \tag{5.4}$$

由于上式$\forall g \in \mathscr{D}(X)$成立且$\mathscr{D}(X)$在$C_b(X)$中稠，故$\forall \nu$，$\tilde{\nu} \in \mathscr{I}$，

$$\int g d\nu = \int g d\tilde{\nu}, \ \forall g \in C_b(X)$$

从而由附录推论3.3知$\nu = \tilde{\nu}$，$\mathscr{I}$为单元集$\{\nu\}$。于是$\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$，$g \in \mathscr{D}(X)$，由(5.4)及$\lim S(t) g$为常数知

$$\lim_{t\to\infty} \int g d(\mu S(t)) = \lim_{t\to\infty} \int S(t) g d\mu = \int \left(\lim_{t\to\infty} S(t) g \right) d\mu$$

$$= \lim_{t\to\infty} S(t) g = \int g d\nu.$$

再由$\mathscr{D}(X)$在$C_b(X)$中稠即知上式$\forall g \in C_b(X)$成立。故

$$\mu S(t) \Rightarrow \nu (t \to \infty). \ \square$$

6. 例 现在应用定理5来计算一些例子。

1° 具参数β的紧邻伊辛模型. 此时$S = Z^d$，$X = \{0,1\}^S$，速度函数为

$$c(u,\eta) = \exp\left\{ -\beta \sum_{v: |v-u|=1} (2\eta(u) - 1)(2\eta(v) - 1) \right\}, \tag{6.1}$$

$u\in Z^d, \eta\in X$.

按定理 2.7 的计算此时

(6.2) $$M=\sup_u \sum_{w\neq u}\Delta_{c(u,\cdot)}(w).$$

而当 $|w-u|>1$ 时,由(6.1)易见 $c(u,{}_w\eta)=c(u,\eta)$, $u\in Z^d$, $\eta\in X$, 于是 $\Delta_{c(u,\cdot)}(w)=\sup\{|c(u,{}_w\eta)-c(u,\eta)|:\eta\in X\}=0$. 当 $|w-u|=1$ 时,

$$|c(u,{}_w\eta)-c(u,\eta)|\exp\left\{-\beta\sum_{\substack{v:|v-u|=1\\ v\neq w}}(2\eta(v)-1)(2\eta(u)-1)\right\}$$

$$\cdot\left|e^{+\beta(2\eta(w)-1)(2\eta(u)-1)}-e^{-\beta(2\eta(w)-1)(2\eta(u)-1)}\right|$$

从而

$$\Delta_{c(u,\cdot)}(w)=e^{(2d-1)\beta}[e^{+\beta}-e^{-\beta}]=e^{2d\beta}(1-e^{-2\beta}).$$

故由(6.2)知

(6.3) $$M=2de^{2d\beta}(1-e^{-2\beta}).$$

另一方面由(2.2.4),(2.4.6)知

(6.4) $\varepsilon=\inf\{c(u,\eta)+c(u,{}_u\eta):u\in Z^d,\eta\in X\}$

由(6.1)得知

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\inf\{e^{2k\beta}+e^{-2k\beta}:k=0,1,2,\cdots,d\}\\&=\inf\{(e^{k\beta}-e^{-k\beta})^2+2:k=0,\cdots,d\}=2.\end{aligned}$$

故由定理 5 知当

$$de^{2d\beta}(1-e^{-2\beta})<1$$

时,紧邻伊辛过程遍历,经具体计算得:

当 $d=1$ 时, $\beta<\frac{1}{2}\log 2$ 紧邻伊辛过程遍历;当 $d=2$ 时,

$$\beta<\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sim 0.16,$$

紧邻伊辛过程遍历.

$$\varepsilon = \inf\left\{\sum_{v\neq u}[c(u,v,\eta)\vee c(u,v,{}_u\eta)]; u\in S,\eta\in X\right\}$$

$$\leqslant \sum_{v\neq u} c(u,v,{}_u\theta)$$

又由定理 2.11 的证明知此时

$$M = \sup\left\{\sum_{u\neq v}\left[\sum_{w\in(u,v)}\Delta_{c(u,v,\cdot)}(w)+\|c(u,v,\cdot)\|\right], v\in S\right\}$$

$$\geqslant \sup_v \sum_{u\neq v}\|c(v,u,\cdot)\| \geqslant \sum_{u\neq v}\|c(u,v,\cdot)\|$$

故 $M\geqslant\varepsilon$，从而定理 5 不提供排它过程是否遍历的信息. 事实上，应用命题 2 容易验证 $\mathscr{I}\supset\{\nu_0,\nu_1\}$.

§5 习题与补充

1. 设Ω是 B- 空间W上的有界线性算子。试证：定义

$$S(t)\triangleq e^{\Omega t}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Omega t)^n}{n!},\ t\geqslant 0$$

合理，且 $\{S(t): t\geqslant 0\}$ 为以Ω为无穷小母元的连续压缩半群。

2. 证明(1.4.3)及(1.4.4)。

3. 证明：连续压缩半群 $\{S(t):\ t\geqslant 0\}$ 的无穷小母元Ω是一闭算子。

4. 设W是一 B- 空间，$\{S(t):\ t\geqslant 0\}$是W上以Ω为无穷小母元的连续压缩半群。 $\forall\lambda>0$，定义W上的线性算子

(4.1) $\qquad R_\lambda:\ R_\lambda f\triangleq\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)f\,dt,\ f\in W,$

(其中积分的意义在下面给出)试证：

(4.2) $\qquad (\lambda I-\Omega)^{-1}=R_\lambda\ \lambda,>0.$

(4.1)中的积分的意义为 Bochner 积分：设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 为

$$c(u,\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{v\neq u} p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0\\ \sum\limits_{v\neq u} p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=1.\end{cases}$$

$$M=\sup_u \sum_{v\neq u}\Delta_{c(u,\cdot)}(v)=\sup_u \sum_{v\neq u} p(u,v)$$

而

$$\varepsilon=\inf\{c(u,\eta)+c(u,{}_u\eta): u\in S,\eta\in X\}=\inf_u \sum_{v\neq u} p(u,v).$$

故 $\varepsilon\leqslant M$，从而定理 5 不提供选举过程是否遍历的信息。事实上，对选举过程来说，$\mathscr{I}\supset\{\nu_0,\nu_1\}$，其中 ν_0，ν_1 分别表示负荷集中在 θ（坐标恒为 0），$\mathbf{1}$（坐标恒为 1）上的概率。因为

$$c(u,\theta)=c(u,\mathbf{1})=0,\ \forall u\in S,$$

所以 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$，

$$\int\Omega f d\nu_0=(\Omega f)(\theta)=0,\int\Omega f d\nu_1=(\Omega f)(\mathbf{1})=0.$$

故由命题 2 知 $\{\nu_0,\nu_1\}\subset\mathscr{I}$。

4° **排它过程**．此时 $X=\{0,1\}^S$，$c(\Lambda,\eta,A)$ 按(2.2.6)定义，于是由(2.4.6)知

$$\varepsilon\triangleq\inf_{u\in S}\inf_{\eta\in X}\sum_{v\neq u}[c(\{u,v\},\eta,\{\zeta:\zeta(u)=1-\eta(u)\})$$

$$+c(\{u,v\},{}_u\eta,\{\zeta:\zeta(u)=\eta(u)\})]$$

而

$$c(\{u,v\},\eta,\{\zeta:\zeta(u)=1-\eta(u)\})=\begin{cases}c(u,v,\eta), & \eta(v)\neq\eta(u),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$c(\{u,v\},{}_u\eta,\{\zeta:\zeta(u)=\eta(u)\})=\begin{cases}c(u,v,{}_u\eta), & \eta(v)=\eta(u),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

故

一般当 β 充分小时，紧邻伊辛过程遍历。

但由已知结果知，$d=1$ 时，紧邻伊辛过程总是遍历的，当 $d=2$ 时，

$$\beta < \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) \sim 0.44,$$

紧邻伊辛过程遍历。说明定理 5 的估计还是不够的。

2° **具参数 λ 的基本接触过程.** 此时 $S=Z^d$, $X=\{0,1\}^S$

$$c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1,\\ \lambda \sum\limits_{v:|v-u|=1} \eta_v, & \eta(u)=0,\end{cases}$$

$$c(u,{}_w\eta)=\begin{cases}\lambda \sum\limits_{v:|v-u|=1} \eta(v), & \eta(u)=1,\\ 1, & \eta(u)=0.\end{cases}$$

于是由(6.4)知

$$\varepsilon=\inf\left\{1+\lambda \sum_{v:|v-u|=1} \eta(v):\ u\in Z^d,\ \eta\in X\right\}=1.$$

又容易看出：$\forall w\neq u$，当 $|w-u|\neq 1$ 或 $|w-u|=1$ 而 $\eta(u)=1$ 时

$|c(u,{}_w\eta)-c(u,\eta)|=0$. 当 $|w-u|=1$, $\eta(u)=0$ 时,

$$|c(u,{}_w\eta)-c(u,\eta)|=\lambda\left|\sum_{\substack{v\neq w\\ |v-u|=1}} \eta(v)+(1-\eta(w))\right.$$

$$\left.-\sum_{v:|v-u|=1} \eta(v)\right|=\lambda|(1-\eta(w))-\eta(w)|=\lambda$$

故由(6.2)知

$$M=\sup\left\{\sum_{w\neq u} \Delta_{c(u,\cdot)}(w):u\in S\right\}$$

$$=\sum_{w:|w-u|=1} \lambda=2d\lambda.$$

由定理 5 知：当 $\lambda<\frac{1}{2d}$ 时，基本接触过程遍历。

3° **选举过程.** 由推论 2.10 知此时

一 σ-有限测度空间，$f: X \to W$.若 $f(x)$ 是取有限个值的函数，即 $\exists A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots,n$ 使 $\mu(A_i) < \infty$，且 f 在 A_i 上取常值 $f_i \neq 0$，而在

$$X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

上取值 0。则定义

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} f_i \mu(A_i).$$

若 f 不是取有限值的函数，但 $\exists\{f_n\}$，每一 f_n 是取有限值的函数且

$$\int_X \|f(x) - f_n(x)\| \mu(dx) \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{4.3}$$

则称 f 为 **Bochner μ- 可积**。对任何 $A \in \mathscr{F}$，f 在 A 上 Bochner μ-积分定义为

$$\int_A f(x)\mu(dx) \triangleq \lim_{n\to\infty} \int_X I_A(x) f_n(x)\mu(dx),$$

其中右边的极限为 W 中的极限。

提示．（4.2）的证明主要是验证以下运算的合理性：$\forall f \in \mathscr{D}(\Omega)$，

$$\begin{aligned}(\lambda I - \Omega)R_\lambda f &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Omega S(t) f\, dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f\, dt - e^{-\lambda t} S(t) f \Big|_0^\infty \\ &\quad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f\, dt = f\end{aligned}$$

其中第二步即分部积分法

$$\begin{aligned}R_\lambda(\lambda I - \Omega) f &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f\, dt \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) \Omega f\, dt = f\end{aligned}$$

于是在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上有 $R_\lambda = (\lambda I - \Omega)^{-1}$，再应用 §1 第 3 目的

(1.2),(1.1.3)证明(4.2)在W上成立。

5. 设 $X=\{0,1\}^S, \forall \Lambda\in\mathscr{S}, \eta\in X, c(\Lambda,\eta)\geqslant 0$, 而

$$c(\Lambda,\eta,A)=\begin{cases}c(\Lambda,\eta), & A=\{({}_\Lambda\eta)_\Lambda\},\\ 0, & A=X(\Lambda)\setminus\{({}_\Lambda\eta)_\Lambda\},\end{cases}$$

$$({}_\Lambda\eta)(u)=\begin{cases}1-\eta(u), & u\in\Lambda,\\ \eta(u), & u\bar{\in}\Lambda,\end{cases}$$

(i) 试写出相应于 $c(\Lambda,\eta)$ 的马氏半群及 Feller 过程存在的条件。

(ii) 设P为上述过程的一个分布，试证：$\forall s\geqslant 0$ 当 $t\to 0$ 时

$$(5.1)\ P((\eta_{s+t})_\Lambda=({}_\Lambda\eta)_\Lambda|\eta_s=\eta)=\left[\sum_{\tilde{\Lambda}\supset\Lambda}c(\tilde{\Lambda},\eta)\right]t+o(t),$$

$$(5.2)\qquad P((\eta_{s+t})_\Lambda=({}_\Lambda\eta)_\Lambda,(\eta_{s+t})_{\Lambda_1}=(\eta_s)_{\Lambda_1}|\eta_s=\eta)$$

$$=\left[\sum_{\substack{\tilde{\Lambda}\supset\Lambda\\ \Lambda\cap\tilde{\Lambda}_1=\phi}}c(\tilde{\Lambda},\eta)\right]t+o(t)$$

而(5.2)中的 $\Lambda_1\in\mathscr{S}$ $\Lambda_1\cap\Lambda=\phi$。

并由此解释 $c(\Lambda,\eta)$ 的意义。

6. 设 $X=Y^S$, Y 为紧距离空间，考虑与习题 5 类似的问题。

7. 设 $S=Z^d$, $N\in\mathscr{S}$, $N\ni 0$ 且有奇数个元，$\delta\in(0,1)$

$$(7.1)\ c(u,\eta)\triangleq\begin{cases}\delta, & |\{y\in S:\eta(y)\neq\eta(u),y-u\in N\}|<\dfrac{|N|}{2},\\ 1-\delta, & |\{y\in S:\eta(y)\neq\eta(u),y-u\in N\}|>\dfrac{|N|}{2},\end{cases}$$

$$u\in S,\eta\in X,$$

(此模型称为多数选举模型) (i) 试证：以此 $c(u,\eta)$ 为速度函数的自旋变相过程存在；(ii) 应用定理4.5证明：当

$$\delta\in\left(\frac{|N|-1}{2|N|},\ \frac{|N|}{2(|N|-1)}\right)$$

时，上述过程(称为多数选举过程)遍历。

8. 设 $X=\{0,1\}^S$; $\beta,\delta\geqslant 0$, $\beta+\delta>0$, $p(u,v)\geqslant 0$, $u,v\in S$; $\sum_v p(u,v)=1$, $u\in S$. (i) 试证：以

$$(8.1)\ c(u,\eta)\triangleq\begin{cases}\beta+\sum_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ \delta+\sum_v p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=1,\end{cases}$$

$$u\in S,\eta\in X$$

为速度函数的自旋变相过程(以后称为有主见的选举过程)存在。(ii) 应用定理 4.5 证明此过程遍历。

9. 设 $X=\{0,1\}^S$; $p(u,v)\geqslant 0,u,v\in S$;

$$\sum_v p(u,v)=1,\ u\in S.$$

试证：以

$$(9.1)\ c(u,\eta)=\begin{cases}\sum_{v\in S}p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=0,\\ \sum_{v\in S}p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=1,\end{cases}$$

$$u\in S,\eta\in X,$$

为速度函数的自旋变相过程(以后称为反选举过程)存在，并应用定理 4.5 讨论它的遍历性。

10. 设 $X=\{0,1\}^S$; $p(u,v)\geqslant 0$, $u,v\in S$;

$$\sum_v p(u,v)=1,\quad u\in S.$$

试证与速度函数

$$(10.1)\ c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1,\\ \lambda\sum_{v\in S}p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\end{cases}$$

$$\lambda>0,u\in S,\eta\in X$$

相应的接触过程存在,并应用定理 4.5 讨论它的遍历性。

第二章　可逆测度与 Gibbs 态

本章主要讨论可逆测度与 Gibbs 态的关系以及可逆测度存在的条件．§1 首先引出可逆测度的概念，讨论可逆测度的一些一般性质；并引进 Gibbs 态的概念，说明本章所讨论的主要问题．作为工具，在 §2 中将侯振挺、陈木法提出的抽象场论就一般空间写出，并将它应用于自旋变相过程和排它过程，得到了它们的速度函数有势的简单有效的充要条件．§3 讨论自旋变相过程、排它过程的 Gibbs 态的构造以及它与可逆测度之间的关系．§4 证明了自旋变相过程的可逆测度存在的充要条件是其速度函数有势，并讨论了排它过程可逆测度存在与速度函数有势的关系．

§1　可逆测度与 Gibbs 态的概念

本节引进可逆测度的概念；说明它与不变测度之间的关系，并讨论它的一般性质；然后引进 Gibbs 的概念，说明本章将论及的主要问题．

1. 定义　设 Ω 是 $C_b(X)$ 上的一个马尔可夫半群的无穷小算子，若 $\forall f,g\in\mathscr{D}(\Omega)$，有

$$\int f(\Omega g)d\mu=\int g(\Omega f)d\mu, \tag{1.1}$$

则称 μ 为关于 Ω 的**可逆测度**．若 Ω 由转移概率速度测度（速度函数）定义，则也称 μ 为转移概率速度测度（速度函数）的**可逆测度**．

若对 Ω (相应地：转移概率速度测度、速度函数) 存在 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 使 $\forall f, g \in \mathscr{D}(\Omega)$, (1.1)成立，则称 Ω (相应地：转移概率速度测度、速度函数)**可逆**. Ω 的一切可逆测度集记作 $\mathscr{R}(\Omega)$.

2. 註 (i) 易见:

$$\mathscr{R}(\Omega) \subset \mathscr{I}(\Omega). \tag{2.1}$$

其中 $\mathscr{I}(\Omega)$ 表关于 Ω 的一切不变测度组成的集

事实上，若 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$, 则由于 $\Omega \mathbf{1} = 0$, 在(1.1)中取 $g = \mathbf{1}$ 即得

$$\int \Omega f d\mu = \int f \Omega \mathbf{1} d\mu = 0,$$

由命题 1.4.2(i) 知 $\mu \in \mathscr{I}(\Omega)$.

(ii) 若 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$, 则由(1.1)知 Ω 是关于内积

$$(f, g) \triangleq \int fg d\mu, \quad f, g \in C_b(X)$$

的一个对称算子.

为什么满足 (1.1) 的 Ω 称为可逆算子，这与相应的随机过程(关于时间)可逆紧密地联系在一起，下面的命题的后一部份便是这个内容. 此外关于 Ω 的可逆测度 μ 也有各种等价条件. 现在一并写在下面.

3. 命题 设 Ω 所决定的马尔可夫半群为 $\{S(t): t \geqslant 0\}$; $p(t, \eta, A), t \geqslant 0, \eta \in X, A \in \mathscr{B}_X$ 为其相应的转移概率函数; $\{\eta_t; P_\eta, \eta \in X\}$ 为其相应的马尔可夫过程. 则 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$ 当且仅当下列三条件有一成立:

(3.1) $\forall t \geqslant 0, \quad \forall f, g \in C_b(X), \int f(S(t)g) d\mu = \int g(S(t)f) d\mu;$

(3.2) $\forall t \geqslant 0, \quad \forall A, B \in \mathfrak{B}(X)$

$$\int_A p(t, \eta, B)\mu(d\eta) = \int_B p(t, \eta, A)\mu(d\eta);$$

(3.3) $\forall n \geqslant 1, \quad \forall \{t_0, \cdots, t_n\} \subset [0, \infty), 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n,$

$$t_1 - t_0 = t_n - t_{n-1},\ t_2 - t_1 = t_{n-1} - t_{n-2}, \cdots$$

$$P(\eta_{t_0} \in A_0, \eta_{t_1} \in A_1, \cdots, \eta_{t_n} \in A_n)$$
$$= P(\eta_{t_n} \in A_0, \eta_{t_{n-1}} \in A_1, \cdots, \eta_{t_0} \in A_n)$$

其中 P 为马尔可夫过程 $\{\eta_t,\ P_\eta,\ \eta \in X\}$ 以 μ 为初始分布的分布.

注. 满足(3.3)的随机过程称为关于时间的**可逆过程**，即随机过程$\{\eta_t\}$对分布 P 来说，时间逆转时分布不变. 由此可看出可逆测度与可逆算子命名的理由.

证. 若(3.1)成立，则 $\forall f, g \in \mathscr{D}(\Omega)$ 有

$$\int f[S(t)g - g]d\mu = \int g[S(t)f - f]d\mu,$$

两端除以 t，并令 $t \to 0$ 由 (1.1.1.5) 即得 (1.1). 反之，若 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$，则由 (1.1.1.2) 知 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall \lambda \in [0, \delta]$，$\forall f$，$g \in C_b(X)$ $\exists \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}(\Omega)$使$(I - \lambda\Omega)\tilde{f} = f$，$(I - \lambda\Omega)\tilde{g} = g$，于是由(1.1)知

$$\int f(I - \lambda\Omega)^{-1}g d\mu = \int (I - \lambda\Omega)\tilde{f} \cdot \tilde{g} d\mu$$
$$= \int (I - \lambda\Omega)\tilde{g} \cdot \tilde{f} d\mu = \int g(I - \lambda\Omega)^{-1} f d\mu,$$

由此即得 $\forall n \geqslant 1$ 有

(3.4) $$\int f(I - \lambda\Omega)^{-n} g d\mu = \int g(I - \lambda\Omega)^{-n} f d\mu.$$

$\forall t > 0$，当 $n > \frac{t}{\delta}$ 时，令 $\lambda = \frac{t}{n}$，则上式成立. 令 $n \to \infty$，则由(1.1.1.4)知(3.1)成立. 故 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$ 与(3.1)等价.

今再证(3.1)与(3.2)的等价性. 记 $B(X)$为X上的有界$\mathscr{B}(X)$可测函数类，则由单调类定理易知：(3.2)等价于

(3.5) $\forall t > 0$，$\forall f, g \in B(X)$，$\int \mu(d\eta) \int p(t, \eta, d\zeta) g(\zeta) f(\eta)$

$$= \int \mu(d\eta) \int p(t,\eta,d\zeta) f(\zeta) g(\eta).$$

由定理 1.1.2 知当(3.5)中的 $f, g \in C_b(X)$ 时，(3.5) 中的等式即(3.1)中的等式．反之，若(3.1)成立，则由定理 1.1.2 及

$$(3.6) \qquad f_n(\eta) \triangleq \frac{n\rho(\eta, A^C)}{1 + n\rho(\eta, A^C)} \in C_b(X) \to I_A,$$

A 为开集知(3.2)成立．

由上面的证明知(3.2)与(3.5)等价，而仿照习题 1 的提示可以证明(3.5)与(3.3)等价　，这一点留给读者去完成．(习题2)．□

下面的命题是命题 1.4.2 的对应物．

4. 命题　设 Ω 是 $C_b(X)$ 上的一个马氏半群的无穷小母元．D 是 Ω 的一个核，即 $\overline{\Omega|_D} = \Omega$，则 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$ 当且仅当 $\forall f, g \in D$，(1.1) 成立．

证明留作习题．

注． 这条命题虽然简单，但对无穷粒子马氏过程的叙述带来了很多方便．因为这时无穷小母元不是按(1.2.2.6)，(1.2.3.3)定义的 Ω，而是 $\bar{\Omega}$，要验证 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$，如应用命题时只需验证：$\forall f, g \in \mathscr{D}(X) = \mathscr{D}(\Omega)$，(1.1) 成立即可；如果不应用命题，则需要先验证 $\forall f, g \in \mathscr{D}(X)$ (1.1) 成立，再用一次逼近过程说明 $\forall f, g \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$，(1.1) (此时需将该处的 Ω 写成 $\bar{\Omega}$) 成立．

以下专门讨论自旋变相和排它速度函数的可逆测度．对于它们的算子有十分简单的核．这就是

5. 引理　设 $X = \{0, 1\}^S$，Ω 是由自旋变相(或排它)速度函数按(1.2.7.4)(或(1.2.11.5))定义的算子．则 X 上的柱函数类

$$C_y l(X) \triangleq \{f: f: X \to R, \exists \Lambda \in \mathscr{S} \text{ 使 } f(\eta) = f(\eta_\Lambda \times \zeta), \forall \eta \in X, \zeta \in X(S \setminus \Lambda)\}$$

是 $\bar{\Omega}$ 的一个核．

证． 由于 $\mathscr{D}(\Omega) = \mathscr{D}(X)$ 是 $\bar{\Omega}$ 的一个核及 $C_y l(X) \subset \mathscr{D}(X)$

是线性子空间，所以要证引理，只需验证：

(5.1) $\forall f\in \mathscr{D}(X)$，$\exists\{f_n\}\subset C_yl(X)$ 使 $f_n\to f$，$\Omega f_n\to \Omega f$.

任取定 $\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S}$，$\Lambda_n\uparrow S$，定义

(5.2) $f_n\in C_yl(X)$：$f_n(\eta)\triangleq f(\eta_{\Lambda_n}\times\theta_{S\setminus\Lambda_n})$，$\eta\in X$.

其中 $\theta(u)\equiv 0$，$u\in S$，则显然 $f_n\in C_yl(X)$ 且由**附录**定理 2.1 知 f 为 X 上的一致连续函数. 在 X 上取(1.2.1.1)定义的距离 ρ. 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta_\varepsilon>0$ 使当 $\rho(\eta,\zeta)<\delta$ 时 $|f(\eta)-f(\zeta)|<\varepsilon$. 而由(1.2.1.1)知 $\exists n_0\in Z_+$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时，$\forall\eta\in X$ 有 $\rho(\eta,\eta_{\Lambda_n}\times\theta_{S\setminus\Lambda_n})<\delta$，从而

$$\|f_n-f\|=\sup_\eta|f(\eta_{\Lambda_n}\times\theta_{S\setminus\Lambda_n})-f(\eta)|\leqslant\varepsilon,$$

即 $f_n\to f$. 今往证：$f_n\in\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}(X)$，且 $\Omega f_n\to\Omega f$.

为方便起见，记

(5.3) $$(\Delta_u f)(\eta)\triangleq f({}_u\eta)-f(\eta),$$

则由(5.2)知

$$|\Delta_{uf_n}(\eta)|=\begin{cases}0, & u\notin\Lambda_n,\\ |\Delta_u f(\eta_{\Lambda_n}\times\theta_{S\setminus\Lambda_n})|, & u\in\Lambda_n.\end{cases}$$

从而

(5.4) $\Delta_{f_n}(u)=\|\Delta_u f_n\|\leqslant\|\Delta_u f\|=\Delta_f(u)$，$\forall u\in S$.

故由 $f\in\mathscr{D}(X)$ 知 $f_n\in\mathscr{D}(X)=\mathscr{D}(\Omega)$. 对于 $\Omega f_n\to\Omega f$ 分自旋变相和排它两种情形讨论.

(i) 设 Ω 由(1.2.7.4)定义. 则由定理 1.2.7 的假设知

(5.5) $$b\triangleq\sup\{c(u,\eta):u\in S,\eta\in X\}<\infty$$

又由 $f\in\mathscr{D}(X)$ 知 $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists\Lambda\in\mathscr{S}$ 使

(5.6) $$\sum_{u\notin\Lambda}\Delta_f(u)<\varepsilon_1,$$

应用 Ω 的定义及(5.4)—(5.6)得知 $\forall n\geqslant 1,\eta\in X$ 有

$$|\Omega f_n(\eta)-\Omega f(\eta)|$$

$$\leqslant \sum_{u \in \Lambda} c(u,\eta)[\,|f_n({}_u\eta) - f({}_u\eta)| + |f_n(\eta) - f(\eta)|\,]$$

$$+ \sum_{u \in \Lambda} c(u,\eta)[\,|\Delta_u f_n(\eta)| + |\Delta_u f(\eta)|\,]$$

$$\leqslant 2b|\Lambda| \cdot \|f_n - f\| + b \sum_{u \in \Lambda} [\Delta f_n(u) + \Delta_f(u)]$$

$$\leqslant 2b[\,|\Lambda| \cdot \|f_n - f\| + \varepsilon_1]$$

令 $n \to \infty$，由 $\|f_n - f\| \to 0$ 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\Omega f_n - \Omega f\| \leqslant 2b\varepsilon_1,$$

由 $\varepsilon_1 > 0$ 任意知 $\Omega f_n \to \Omega f$，即(3.1)对自旋变相的情形获证.

(ii) 设Ω由(1.2.11.5)定义，则由(5.4)，(5.6)，(1.2.11.3)得知 $\forall n \geqslant 1, \eta \in X$ 有

$$|\Omega f_n(\eta) - \Omega f(\eta)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \neq v \\ u \in \Lambda 或 v \in \Lambda}} c(u,v)[\,|f_n({}_{(u,v)}\eta) - f({}_{(u,v)}\eta)|$$

$$+ |f_n(\eta) - f(\eta)|\,]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \in \Lambda \\ v \in \Lambda}} c(u,v)[\,|f_n({}_{(u,v)}\eta) - f_n(\eta)|$$

$$+ |f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)|\,]$$

$$\leqslant 2 \sum_{u \in \Lambda} \Big(\sum_{\substack{v \in S \\ v \neq u}} c(u,v) \|f_n - f\| \tag{5.7}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \in \Lambda \\ v \in \Lambda}} c(u,v)[\Delta_{f_n}(u) + \Delta_{f_n}(v)$$

$$+ \Delta_f(u) + \Delta f(v)]$$

$$\leqslant 2 \Big(\sup_u \sum_v c(u,v) \Big) \Big[\, |\Lambda| \cdot \|f_n - f\| + \sum_{u \in \Lambda} \Delta_f(u) \Big]$$

$$\leqslant 2\left(\sup_u \sum_v c(u,v)\right)[\,|\Lambda|\cdot\|f_n - f\| + \varepsilon_1] < \infty$$

其中第二步用到不等式：当 $\eta(u)\neq\eta(v)$ 时，

$$|f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)| \leqslant |f({}_{(u,v)}\eta) - f({}_u\eta)|$$
$$+ |f({}_u\eta) - f(\eta)| \leqslant \Delta_f(v) + \Delta_f(u),$$

当 $\eta(u)=\eta(v)$ 时 $|f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)| = 0 \leqslant \Delta_f(v) + \Delta_f(u)$，由 $f_n\to f$，及(5.7)，令 $n\to\infty$，即得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|\Omega f_n - \Omega f\| \leqslant 2\left(\sup_u \sum_v c(u,v)\right)\varepsilon_1$$

由 $\varepsilon_1>0$ 任意及(1.2.11.3)即得 $\Omega f_n\to\Omega f$. □

6. 命题 (i) 设 $\bar{\Omega}$ (Ω 如(1.2.7.2)定义) 是自旋变相过程的无穷小算子，则 $\mu\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$ 当且仅当 $\forall f\in C_b(X)$,

(6.1) $\quad \forall u\in S \quad \int c(u,\eta)f(\eta)\mu(d\eta) = \int c(u,\eta)f({}_u\eta)\mu(d\eta),$

其中 $c(u,\eta)$. $u\in S,\eta\in\{0,1\}^S$，是与 Ω 相应的速度函数.

(ii) 设 $\bar{\Omega}$ (Ω 如(1.2.11.5)定义)是排它过程的无穷小算子，则 $\mu\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$ 当且仅当 $\forall f\in C_b(X)$,

(6.2) $\quad \forall u,v\in S, \quad \int c(u,v,\eta)f(\eta)\mu(d\eta)$

$$= \int c(u,v,\eta)f({}_{(u,v)}\eta)\mu(d\eta),$$

其中 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为与 Ω 相应的速度函数.

证. (i) 由直接计算得：$\forall f,g\in\mathscr{D}(\Omega)$

(6.3) $\quad \int(f\Omega g - g\Omega f)d\mu = \sum_{v\in S}\int c(v,\cdot)\Delta_v(f({}_v(\cdot))g)d\mu.$

设 $\mu\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$，要证(6.1) $\forall f\in C_b(X)$ 成立，由**附录**引理 2.5 (iii) 及 2.6(ii) 知只需证：(6.1)对任何

$$f_\Lambda(\eta) = \prod_{u\in\Lambda}\eta(u), \Lambda\in\mathscr{S},$$

成立. 当 $\Lambda=\phi$ 或 $\Lambda\neq\phi$ 且 $u\notin\Lambda$ 时，$f_\Lambda = f_\Lambda({}_u(\cdot))$，因而

(6.1)显然成立；当 $\Lambda \neq \phi$ 且 $u \in \Lambda$ 时，令 $f \triangleq f_\Lambda$，$g \triangleq f({}_u(\cdot))$
注意到 $f^2 = f$，且当 $u \neq v$ 时，

$$\Delta_v(f({}_v(\cdot))g)(\eta) = f(\eta)g({}_v\eta), - g(\eta)f({}_v\eta) = 0,$$

于是由(6.3)得

$$0 = \int (f\Omega g - g\Omega f) d\mu = \int c(u,\eta)[f^2(\eta) - f^2({}_u\eta)]\mu(d\eta)$$

$$= -\int c(u,\eta)[f({}_u\eta) - f(\eta)]\mu(d\eta)$$

故(6.1)对这种情形也成立.

反之，设(6.1)对 $C_b(X)$ 中的任何元成立，则 $\forall f, g \in \mathscr{D}(\Omega)$，由(6.3)及(6.1)

$$\int f\Omega g d\mu - \int g\Omega f d\mu$$

$$= \sum_u \int c(u,\cdot)\Delta_u(f({}_u(\cdot))g)d\mu = 0.$$

由于 $\mathscr{D}(\Omega)$ 是 $\bar{\Omega}$ 的核，故 $u \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$.

(ii) 证法与 (i) 类似. 首先由直接计算得对任何 f，$g \in \mathscr{D}(\Omega)$，有

$$(6.4) \qquad \int (f\Omega g - g\Omega f) d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\bar{u},\bar{v} \in S} \int c(\bar{u},\bar{v},\cdot)\Delta_{(\bar{u},\bar{v})}(f({}_{(\bar{u},\bar{v})}(\cdot)g)d\mu.$$

其中 $\Delta_{(u,v)}f(\eta) \triangleq f({}_{(u,v)}\eta) - f(\eta)$.

若(6.2)成立，则仿上由(6.2)，(6.4)及 $\mathscr{D}(\Omega)$ 是 $\bar{\Omega}$ 的一个核知 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$. 反之若 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$，则由附录引理 2.5 (ii) 及引理 2.6(ii) 知要证(6.2) $\forall f \in C_b(X)$ 成立，只需证 $\forall f = I_{\{\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)}$，$\Lambda \in \mathscr{S}$，$\xi \in X(\Lambda)$ 成立. 今分情形① $u, v \in \Lambda$；②$u \in \Lambda$，$v \bar{\in} \Lambda$；③ $u \bar{\in} \Lambda$，$v \bar{\in} \Lambda$ 讨论之.

情形①：当 $u = v$，或 $u \neq v$ 但 $\xi(u) = \xi(v)$ 时，显然

(6.2)成立。 当 $\xi(u) \neq \xi(v)$ 时，令 $g(\eta) \triangleq f({}_{(u,v)}\eta)$，则容易验证：$\forall \eta \in X$，$f(\eta)g(\eta) = 0$，$f(\eta)g({}_{(\bar{u},\bar{v})}\eta) = 0$，除非 $\{\bar{u},\bar{v}\} = \{u,v\}$，因而 $\forall \eta \in X$，

$$(f\Omega g)(\eta) = c(u,v,\eta)f(\eta)g({}_{(u,v)}\eta) = c(u,v,\eta)f(\eta)$$

同样可以验证：$\forall \eta \in X, (g\Omega f)(\eta) = c(u,v,\eta)g(\eta)$。 因此 (6.2) 也成立。

情形②. 令 $f_{y_1} = I_{\{\xi \times y_1\} \times X(S \setminus (A \cup \{v\}))}$，则

$$f = \sum_{y_1 \in Y_v} f_{y_1},$$

由情形①(将现在的 $A \cup \{v\}$ 看成那里的 A!) 知

$$\begin{aligned}
&\int c(u,v,\eta)f(\eta)\mu(d\eta) \\
&= \sum_{y_1 \in Y_v} \int c(u,v,\eta)f_{y_1}(\eta)\mu(d\eta) \\
&= \sum_{y_1 \in Y_v} \int c(u,v,\eta)f_{y_1}({}_{(u,v)}\eta)\mu(d\eta) \\
&= \int c(u,v,\eta)f({}_{(u,v)}\eta)\mu(d\eta).
\end{aligned}$$

情形③. 由于 $f(\eta) = f({}_{(u,v)}\eta)$ 对任何 $\eta \in X$ 成立，所以 (6.2)成立。□

7. 命题 (i) 设 Ω 是自旋变相过程的无穷小算子，记

(7.1) $\mu(A \times X(S\setminus\Lambda) | \mathscr{F}(S\setminus\Lambda)(\eta) = \mu(A | \eta_{S\setminus\Lambda})$，$\Lambda \in \mathscr{S}$，$A \subset X(\Lambda)$，其中 $\eta_{S\setminus\Lambda}$ 表示 η 在 $X(S\setminus\Lambda)$ 中的投影，即若 $\eta = \{\eta(u): u \in S\}$，则 $\eta_{S\setminus\Lambda} \triangleq \{\eta(u): u \in S\setminus\Lambda\}$ (以后也采用此记号). 当 $A = \{\xi\}$ 时，记 $\mu(\{\xi\}|\eta_{S\setminus\Lambda}) = \mu(\xi|\eta_{S\setminus\Lambda})$，则 $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$ 当且仅当

(7.2) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\forall \xi \in X(\Lambda)$，$\forall u \in \Lambda$，

$$c(u, \xi \times \zeta)\mu(\xi|\zeta) = c(u, {}_u\xi \times \zeta)\mu({}_u\xi|\zeta)$$

ζ-a.c.$(\mu_{S\setminus\Lambda})$，其中 $\xi \times \zeta$ 表示 $\xi \cup \zeta$. $\mu_{S\setminus\Lambda}(A) \triangleq \mu(X(\Lambda) \times A)$，

$A \in \mathscr{F}_0(S \setminus \Lambda)$.

(ii) 设 $\bar{\Omega}$ 是排它过程的无穷小算子，则 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$ 当且仅当

(7.3) $\quad \forall \Lambda \in \mathscr{S}, \ \forall \xi \in X(\Lambda), \ \forall \{u, v\} \subset \Lambda,$

$$c(u, v, \xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) \mu(\{\xi\} \times X(S \setminus \Lambda) | \mathscr{A}(S \setminus \Lambda))$$

$$= c(u, v, {}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) \mu(\{{}_{(u,v)}\xi\} \times X(S \setminus \Lambda) | \mathscr{A}(S \setminus \Lambda))$$

$a.e.\mu.$

其中 $\mathscr{A}(S \setminus \Lambda)$ 为由 $\mathscr{F}(S \setminus \Lambda)$ 及 $X_k(\Lambda) \times X(S \setminus \Lambda)$, $k = 0, \cdots, |\Lambda|$ 生成的 σ- 代数，

$$X_k(\Lambda) = \left\{ \xi \in X(\Lambda) : |\xi| \triangleq \sum_{u \in \Lambda} \xi(u) = k \right\},$$

注. (7.1)的左边与 η_Λ 无关，所以(7.1)的右边记法合理.

证. (i) 对于自旋变相过程，若 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$, $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$, 取(6.1)中的 $f = I_{\{\xi\} \times F}$, 其中 F 为 $\mathscr{F}_0(S \setminus \Lambda)$ 中的柱集，于是由(6.1)知 $\forall u \in \Lambda$ 有

$$\int_{X(\Lambda) \times F} c(u, \xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) I_{\{\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)} d\mu$$

$$= \int c(u, \eta) f(\eta) \mu(d\eta) = \int c(u, \eta) f({}_u\eta) \mu(d\eta)$$

$$= \int_{X(\Lambda) \times F} c(u, \eta) I_{\{{}_u\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)}(\eta) \mu(d\eta) \tag{7.4}$$

$$= \int_{X(\Lambda) \times F} c(u, {}_u\xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) I_{\{{}_u\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)} d\mu.$$

由单调类定理知上式 $\forall F \in \mathscr{F}_0(S \setminus \Lambda)$ 成立. 于是由条件期望及其平滑性质知（注意 $c(u, \xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda})$ 为 $\mathscr{F}(S \setminus \Lambda)$ 可测）$\forall F \in \mathscr{F}_0(S \setminus \Lambda)$ 有

$$\int_{X(\Lambda) \times F} c(u, \xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) E[I_{\{\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)} | \mathscr{F}(S \setminus \Lambda)] d\mu \tag{7.5}$$

$$= \int_{X(\Lambda) \times F} c(u, {}_u\xi \times (\cdot)_{S \setminus \Lambda}) E[I_{\{{}_u\xi\} \times X(S \setminus \Lambda)} | \mathscr{F}(S \setminus \Lambda)] d\mu$$

因此由(7.1)的记法知(7.2)成立.

反之，若 (7.2) 成立，则 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$， $\forall \xi \in X(\Lambda)$， $\forall u \in \Lambda$， $\forall F \in \mathscr{F}_0(S\backslash\Lambda)$，(7.5) 成立. 由条件期望的平质滑性质知(7.4)的前后两端相等. 取 $F = X(S\backslash\Lambda)$， 即得 (6.1) 中等式 $\forall f \triangleq I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)}, \Lambda \in \mathscr{S}$， $\xi \in X(\Lambda)$， $u \in \Lambda$ 成立，而当 $u \notin \Lambda$ 时 (6.1) 中的等式显然 $\forall f \triangleq I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)}$ 成立. 故由附录引理 2.5 (ii) 知(6.1)式 $\forall f \in C_y l(X)$ 成立，从而由**附录**引理 2.6(ii) 知(6.1) 式 $\forall f \in C_b(X)$ 成立. 由命题 6 (i) 知 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$，

(ii) 对于排它过程，若 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$， 则仿 (i) 可证 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$， $\forall \xi \in X(\Lambda)$， $\forall \{u, v\} \subset \Lambda$， $\forall k \in \{1, 2, \cdots, |\Lambda|\}$， $\forall F \in \mathscr{F}_0(S\backslash\Lambda)$，在(6.2)中取 $f = I_{(\{\xi\}\cap X_k(\Lambda))\times F}$ 即得

$$(7.6)\quad \int_{X_k(\Lambda)\times F} c(u, v, \xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)} d\mu$$

$$= \int_{X_k(\Lambda)\times F} c(u, v, {}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) I_{\{(u,v)\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)} d\mu.$$

由 $\mathscr{A}(S\backslash\Lambda)$ 的定义、条件期望定义及其平滑性得

$$(7.7)\quad \int_{X_k(\Lambda)\times F} c(u, v, \xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda) | \mathscr{A}(S\backslash\Lambda)) d\mu$$

$$= \int_{X_k(\Lambda)\times F} c(u, v, {}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \mu(\{{}_{(u,v)}\xi\}\times X(S\backslash\Lambda) | \mathscr{A}(S\backslash\Lambda)) d\mu$$

由此即得(7.3).

反之，若(7.3)成立，则(7.7)，从而(7.6)对任何 $k \in \{0, 1, \cdots, |\Lambda|\}$，$\{u, v\} \subset \Lambda$ 及 $F = X(S\backslash\Lambda)$ 成立. 将此诸式对 k 求和并稍加变换即得 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}_l$， $\forall \xi \in X(\Lambda)$， $\forall \{u, v\} \subset \Lambda$，

$$(7.8)\quad \int c(u, v, \eta) I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)}(\eta) \mu(d\eta)$$

$$= \int c(u, v, \eta) I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)}({}_{(u,v)}\eta) \mu(d\eta).$$

今再证(7.8) $\forall u,v\in S$ 成立．当 $u\in\Lambda$，$v\bar{\in}\Lambda$ 时，将(7.8)中的 Λ 换成 $\Lambda\cup\{v\}$，ξ 换成 $\xi\times y$，$y\in Y_v$，即得

$$\int c(u,v,\eta)I_{\{\xi\times y\}\times X(S\setminus(\Lambda\cup\{v\}))}(\eta)\mu(d\eta)$$

$$=\int c(u,v,\eta)I_{\{\xi\times y\}\times X(S\setminus(\Lambda\cup\{v\}))}({}_{(u,v)}\eta)\mu(d\eta)$$

再将此式对 $y\in Y_v$ 求和，即知(7.8)对任何 $u\in\Lambda,v\bar{\in}\Lambda$ 成立．至于(7.8)对 $u\bar{\in}\Lambda$，$v\bar{\in}\Lambda$ 成立是显然的．故(6.2)对 $f=I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)}$，$\Lambda\in\mathscr{S}_f$ $\xi\in X(\Lambda)$ 成立，从而由**附录的引理 2.5**(ii)，**2.6**(ii) 知(6.2) $\forall f\in C_b(X)$ 成立．由命题 6 (ii) 知，$\mu\in\mathscr{R}(\Omega)$．□

8. 定义 设 $c(u,\eta)$，$u\in S$，$\eta\in X$ 是自旋变相速度函数，且满足

(8.1) $\forall u\in S$，$\forall\eta\in X$，$c(u,\eta)>0$．

此时称它为正自旋变相速度函数． 对正自旋变相速度函数 $c(u,\eta)$，若 $\exists V:X\to R$ 使

(8.2) $\forall\eta\in X$，$\forall u\in S$，$\log c(u,\eta)-\log c(u,{}_u\eta)=V({}_u\eta)-V(\eta)$

成立，则称 $c(u,\eta)$ **有势**，并称 V 为速度函数 $c(u,\eta)$ 的**势**．$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\eta\in X$，定义

(8.3) $f^\Lambda:f^\Lambda(\eta)\triangleq\exp(V(\eta))/\sum_{\xi\in X(\Lambda)}\exp(V(\xi\times\eta_{S\setminus\Lambda}))$，

$\eta\in X$．

则称函数族$\{f^\Lambda:\Lambda\in\mathscr{S}\}$为 $c(u,\eta)$ 的一个**规范**．如果 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 满足(采用命题 7 的记号)

(8.4) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall\xi\in X(\Lambda)$，$\mu(\xi|\zeta)=f^\Lambda(\xi\times\zeta)$，

ζ-$a.e.(\mu_{S\setminus\Lambda})$

则称 μ 为此规范（或势 V）的一个 **Gibbs 态** (Gibbs state) 或 **Gibbs 随机场**，势 V 的 Gibbs 态的全体记作 $\mathscr{G}_S(V)$．

在这一章中，我们将得到自旋变相速度函数有势的一个简单

有效的充分与必要条件；在有势的条件下证明

$$(8.5)\qquad \mathscr{R}(\Omega)=\mathscr{G}_s(V)\neq\phi.$$

势 V 的 Gibbs 态是 60 年代中期，Dobrushin 等人用现代概率论研究粒子系统的平衡态 (equilibrium state) 而提出的一个重要概念. 而可逆性概念是刻划粒子系统的细致平衡 (detailed balance). 物理学家通常认为平衡态与细致平衡是一致的. (8.5) 式表明这两个概念的一致性从数学上得到了证明. 这个结果原来是就特殊形式的速度函数证明的. 此处证明了一般情形. 而且还证明了 $\mathscr{R}(\Omega)\neq\phi$ 的充要条件是速度函数有势.

9. 定义 设 $c(u,v,\eta)$, $u,v\in S$, $\eta\in X$ 是排它速度函数，且满足

$$(9.1)\quad \forall u,v\in S,\ u\neq v,\ \forall\eta\in X,\eta(u)\neq\eta(v),\ c(u,v,\eta)>0.$$

如果存在函数 $V:X\to R$ 使得 $\forall\eta\in X$, $\eta(u)\neq\eta(v)$ (自然 $u\neq v$)

$$(9.2)\qquad \log c(u,v,\eta)-\log c(u,v,{}_{(u,v)}\eta)=V({}_{(u,v)}\eta)-V(\eta),$$

则称 $c(u,v,\eta)$ **有势**，而 V 称为它的一个**势**. $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$, 定义

$$(9.3)\qquad \pi_k^\Lambda:\ \pi_k^\Lambda(\xi\times\zeta)\triangleq I_{X_k(\Lambda)}(\xi)\exp(V(\xi\times\zeta))\Big/\sum_{\omega\in X_k(\Lambda)}\exp(V(\omega\times\zeta)),\zeta\in X(S\backslash\Lambda),$$

其中 $X_k(\Lambda)$ 的定义见命题 7 (ii). 如果 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 且对任何 $\Lambda\in\mathscr{S}$, $\xi\in X(\Lambda)$ 满足

$$(9.4)\qquad \mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)\,|\,\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\cdot)=\pi^\Lambda_{|(\cdot)_\Lambda|}(\xi\times(\cdot)_{S\backslash\Lambda}),\quad a.e.\ \mu,$$

其中 $\mathscr{A}(S\backslash\Lambda)$ 的意义见命题 7 (ii)，则称 μ 为速度函数 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ (或相应的势 V) 的**正则 Gibbs 态** (Canonical Gibbs state),

V 的正则 Gibbs 态的全体记作 $\mathscr{G}_c(V)$.

本章将得到排它速度函数有势的一个简单有效的充分与必要条件;在有势条件下,证明了

$$\mathscr{R}(\bar{\Omega}) = \mathscr{G}_c(V) \neq \phi. \tag{9.5}$$

§2 场论的推广

本节将侯振挺、陈木法提出的场论概念推广到一般空间上,讨论它的有势性、弱可配称性等问题,然后将它具体化到空间

$$X = \prod_{u \in S} Y_u,$$

S 可数, $Y_u = Y$ 为有限集. 得出速度函数 $c(u, \eta)$, $c(u, v, \eta)$ 有势的简单有效的判别准则.

1. 定义 设 X 是一任意集, T 为任一指标集, $Q(t) = \{q(\eta, \tilde{\eta}, t): \eta, \tilde{\eta} \in X\}$, $t \in T$, 为定义在 T 上的一族实函数, 满足下列条件:

(1.1) $\forall \eta, \tilde{\eta} \in X$, $\eta \neq \tilde{\eta}$, $q(\eta, \tilde{\eta}, \cdot) \geqslant 0$,

(1.2) "零同"性: $\forall t \in T$, $\forall \eta$, $\tilde{\eta} \in X$, $q(\eta, \tilde{\eta}, t) > 0 \Longleftrightarrow q(\tilde{\eta}, \eta, t) > 0$.

给定 $t \in T$, 如果 $q(\eta, \tilde{\eta}, t) > 0$, 则称在时刻 t, η **直达** $\tilde{\eta}$, 记作 $\eta \xrightarrow{t} \tilde{\eta}$; 称 $\eta_1 \xrightarrow{t} \eta_2 \xrightarrow{t} \eta_3 \cdots \xrightarrow{t} \eta_{n+1}$ 为 $Q(t)$ 在时刻 t 由 η_1 到 η_{n+1} 的一条 (n 节)**路**,记作 $L(t) = (\eta_1, \cdots, \eta_{n+1})$, 并称 $\eta_i \xrightarrow{t} \eta_{i+1} (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $L(t)$ 的一**节**,还称在时刻 t, η_1 **可达** η_{n+1}, 记作 $\eta_1 \overset{t}{\sim} \eta_{n+1}$.

若 $\eta \xrightarrow{t} \tilde{\eta}$, 则定义

(1.3) $\varphi(\eta,\tilde{\eta},t) \triangleq \log q(\eta,\tilde{\eta},t) - \log q(\tilde{\eta},\eta,t)$,

(1.4) $\varphi(L(t)) \triangleq \sum_{k=1}^{n} \varphi(\eta_k,\eta_{k+1},t)$, $L(t) = (\eta_1,\cdots,\eta_{n+1})$.

记 $\varphi(t) \triangleq (\varphi(\eta,\tilde{\eta},t): q(\eta,\tilde{\eta},t) > 0,\ \eta,\ \tilde{\eta} \in X)$, $t \in T$. 称$(X, Q(t),\varphi(t))$ (或简记作 $Q(t)$)为**场**. $Q(t)$ 的路为场的路. $\varphi(t)$称为 $Q(t)$ 的**场强**, $\varphi(L(t))$ 为场沿 $L(t)$ 所作的"**功**".

如果 $\exists V(t) = \{V(\eta,t): \eta \in X\}, t \in T$,使当 $\eta \xrightarrow{t} \tilde{\eta}$ 时, 有

(1.5) $V(\tilde{\eta},t) - V(\eta,t) = \varphi(\eta,\tilde{\eta},t)$,

则称 $(X,Q(t),\varphi(t))$ 为**有势场**, $V(t)$ 称为 $Q(t)$ 的**势**.

称场 $Q(t)$ 与**路径无关**, 如果 $\forall t \in T$, $\forall L(t) = (\eta,\eta_1,\cdots,\eta_n,\eta), n \geq 1$. (闭路!)

(1.6) $\varphi(L(t)) = 0$.

称 $Q(t)$ 为**弱可配称**, 如果 $\exists u(t) = \{u(\eta,t): \eta \in X\}$, $t \in T$, 使

(1.7) $\forall t \in T$, $\forall \eta \in X$, $u(\eta,t) > 0$,

(1.8) $\forall t \in T$, $\forall \eta,\tilde{\eta} \in X, u(\eta,t)q(\eta,\tilde{\eta},t) = u(\tilde{\eta},t)q(\tilde{\eta},\eta,t)$

成立,此时称 $u(t), t \in T$, 为**配称函数**.

在X中, $\forall t \in T$, 可以按下式定义等价关系"$\overset{t}{\sim}$"如下:

(1.9) $\overset{t}{\sim}$: $\eta \overset{t}{\sim} \tilde{\eta} \Longleftrightarrow \eta = \tilde{\eta}$ 或 $\eta \xrightarrow{t} \tilde{\eta}$.

于是将X分成等价类 $X_l(t), l \in D(t)$ ($D(t)$ 为与 t 有关的一个指标集)使得同一类中的元一定可以互达,而属于不同类的元则不互达. 下面我们 $\forall l \in D(t)$, 任意取定一元 $\Delta_l \in X_l(t)$; $\forall \eta \in X_l(t)$, $\eta \neq \Delta_l$, 取定 ($X_l(t)$ 中的)连接 Δ_l 与 η 的一条路

(1.10) $L_l(\eta,t) = (\Delta_l,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\eta)$;

其中 k 与 η 有关,记 $\Delta_l = \eta_0, \eta = \eta_{k+1}$, 并令

$$(1.11)\quad \begin{cases} \hat{q}(\Delta_l,\ \eta,\ t) \triangleq \prod_{i=0}^{k} q(\eta_i, \eta_{i+1}, t), \\ \hat{q}(\eta,\ \Delta_l,\ t) \triangleq \prod_{i=0}^{k} q(\eta_{i+1}, \eta_i, t). \end{cases}$$

$$(1.12)\quad \lambda(\eta,\ t) \triangleq \begin{cases} 1, & \eta = \Delta_l, \\ \hat{q}(\Delta_l, \eta, t)/\hat{q}(\eta, \Delta_l, t), & \eta \neq \Delta_l, \eta \in X_l(t). \end{cases}$$

可以看出，上述的一序列定义（特别是路径无关以前的各条定义）是比照着经典场论而给出的，但是这种对比却在讨论马链及无穷粒子系统的可逆性问题时有了有趣的应用.

下列首先证明

2. 定理 在上述假定和记号下，设 $Q(t)$ 是上述给定的场，则 $\forall t \in T$ 下列 4 个断言等价：

(2.1) $Q(t)$ 有势；

(2.2) $Q(t)$ 与路径无关；

(2.3) $Q(t)$ 弱可配称；

(2.4) $\forall l \in D(t), \forall \eta, \tilde{\eta} \in X_l(t)$ 有

$$\hat{q}(\Delta_l, \eta, t) q(\eta, \tilde{\eta}, t) \hat{q}(\tilde{\eta}, \Delta_l, t) = \hat{q}(\Delta_l, \tilde{\eta}, t) q(\tilde{\eta}, \eta, t) \hat{q}(\eta, \Delta_l, t),$$

此时由(1.12)定义的 $\lambda(\eta, t)$, $\eta \in X$, 是 $Q(t)$ 的一个配称函数，$V(t) \triangleq \{V(\eta, t)$: $V(\eta, t) \triangleq \log \lambda(\eta, t), \eta \in X\}$ 是 $Q(t)$ 的一个势. 还有，若 $V_1(t)$ 是 $Q(t)$ 的另一个势，则存在 $\{c_l(t): l \in D(t)$, $c_l: T \to R\}$ 使 $V_1(\eta, t) = V(\eta, t) + c_l(t), \eta \in X_l(t)$

证. (2.1)⇒(2.2). 设 $V(t)$ 是 $Q(t)$ 的一个势，则对任何一个闭合迴路 $L(t) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n+1}), \eta_1 = \eta_{n+1} = \eta$, 由 (1.3)—(1.5) 知

$$\varphi(L(t)) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\eta_k, \eta_{k+1}, t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (V(\eta_k, t) - V(\eta_{k+1}, t)) = 0$$

(2.2) $\Longrightarrow$ (2.4) $\forall l \in D(t)$, $\forall \eta$, $\tilde{\eta} \in X_l(t)$, 若 $\eta \overset{t}{\not\longrightarrow} \tilde{\eta}$, 则 $q(\eta, \tilde{\eta}, t) = q(\tilde{\eta}, \eta, t) = 0$, 故(2.4)中的等式自动成立. 若 $\eta \overset{t}{\longrightarrow} \tilde{\eta}$, 则由 $X_l(t), L_l(\eta, t), L_l(\tilde{\eta}, t)$ 的定义及路径无关知

$$\varphi(L_l(\tilde{\eta}, t)) = \varphi(L_l(\eta, t)) + \varphi(\eta, \tilde{\eta}, t),$$

由(1.3),(1.4)及(1.11)即得

$$\begin{aligned} &\log \hat{q}(\Delta_l, \tilde{\eta}, t) - \log q(\tilde{\eta}, \Delta_l, t) \\ &\quad = [\log \hat{q}(\Delta_l, \eta, t) - \log q(\eta, \Delta_l, t)] \\ &\qquad + \log q(\eta, \tilde{\eta}, t) - \log q(\tilde{\eta}, \eta, t) \end{aligned}$$

此即(2.4)中的等式.

(2.4)$\Rightarrow$(2.3). 设 (2.4) 成立. $\forall \eta \in X$, 则 $\exists l \in D(t)$ 使 $\eta \in X_l(t)$, 于是可按(1.12)定义 $\lambda(\eta, t)$, 从而 $\lambda(\eta, t)$ 满足(1.7). 今往证: $\lambda(\eta, t)$ 是 $Q(t)$ 的一个配称函数.

$\forall \eta, \tilde{\eta} \in X$, 若 $\eta \overset{t}{\not\longrightarrow} \tilde{\eta}$, 则由 $q(\eta, \tilde{\eta}, t) = q(\tilde{\eta}, \eta, t) = 0$

知(1.8)中的等式对 $u(\cdot, t) = \lambda(\cdot, t)$ 自动成立; 若 $\eta \overset{t}{\longrightarrow} \tilde{\eta}$ 则 $\exists l \in D(t)$ 使 $\eta, \tilde{\eta} \in X_l(t)$, 于是由(2.4)中的等式及(1.12)知(1.8)中的等式对 $u(\cdot, t) = \lambda(\cdot, t)$ 成立. 故 $Q(t)$ 弱可配称且 $\lambda(\eta, t)$ 为一配称函数.

(2.3)$\Rightarrow$(2.1). 设 $Q(t)$ 弱可配称, 且 $u(\eta, t), \eta \in X$ 是 $Q(t)$ 的一个配称函数, 则 $\forall \eta$, $\tilde{\eta} \in X$, $\eta \overset{t}{\longrightarrow} \tilde{\eta}$, 由(1.3), (1.8) 知 $V(\eta, t) \triangleq \log u(\eta, t)$ (由(1.7)知 $V(\eta, t)$ 的定义合理)满足(1.5). 故 $Q(t)$ 有势.

由证明 (2.4)$\Rightarrow$(2.3), (2.3)$\Rightarrow$(2.1) 的过程知道 $\log \lambda(\eta, t)$ 是 $Q(t)$ 的一个势. 此外 $\forall \eta \in X_l(t)$, 存在一条路 $L(t) = (\eta_0, \cdots,$

$\eta_{n+1})$，$\eta_1=\Delta_l$，$\eta_{n+1}=\eta$，于是由势的定义(1.5)知

$$V_1(\eta,t)-V_1(\Delta_l,t)=\sum_{k=1}^{n}(V_1(\eta_{k+1},t)-V_1(\eta_k,t))$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(V(\eta_{k+1},t)-V(\eta_k,t))$$

$$=V(\eta,t)-V(\Delta_l,t).$$

令 $c_l(t)\triangleq V_1(\Delta_l,t)-V(\Delta_l,t)$ 即得

$$V_1(\eta,t)=V(\eta,t)+c_l(t),\eta\in X_l(t)\ .\square$$

作为定理2的应用，我们讨论自旋变相速度函数及排它速度函数所决定的场的有势条件.

3. 定义 设 $X=\{0,1\}^S$，S 可数，$c(\cdot,\cdot):S\times X\to R$，$c(\cdot,\cdot,\cdot):S\times S\times X\to R$ 分别满足

(3.1) $\quad\forall u\in S,\ \forall\eta\in X\ \ c(u,\eta)>0,$

(3.2) $\quad c(u,v,\eta)\begin{cases}=0, & \eta(u)=\eta(v),\\ >0, & \eta(u)\neq\eta(v),\end{cases}$

再令

(3.3) $\quad q_s(\eta,\tilde\eta)=\begin{cases}c(u,\eta), & \tilde\eta={}_u\eta,\\ 0, & \tilde\eta\neq\eta \text{ 的其它情形}.\end{cases}$

(3.4) $\quad q_e(\eta,\tilde\eta)=\begin{cases}c(u,v,\eta), & \tilde\eta={}_{(u,v)}\eta,\quad \eta(u)\neq\eta(v),\\ 0, & \tilde\eta\neq\eta\text{的其它情形}.\end{cases}$

4. 定理 设(3.1)成立，且 $Q_s=\{q_s(\eta,\tilde\eta):\eta,\tilde\eta\in X\}$ 由(3.3)定义，则场 Q_s 有势的充要条件是 $\forall u,v\in S$，$\forall\eta\in X$ 有

(4.1) $\quad c(u,\eta)c(v,{}_u\eta)c(u,{}_v({}_u\eta))c(v,{}_v\eta)$

$$=c(v,\eta)c(u,{}_v\eta)c(v,{}_u({}_v\eta))c(u,{}_u\eta).$$

场 Q_s 有势即为 $\exists V:X\to R$ 使(1.8.2)成立.

注(i) 由此定理可以看出 Q_s 的势与§1定义的 $c(u,\eta)$ 的势是一致的，而且此处得出的有势条件并不依赖于 $c(u,\cdot)$

$\in C_b(X)$ 等条件.

(ii) 由 Q_t 的定义知,它的所有闭路都具有下列形状:

$$L=(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n),\eta_n=\eta_0,\eta_k={}_{u_k}(\eta_{k-1}),k=1,\cdots,n.$$

这里最短的闭路是 $L=(\eta,{}_u\eta,{}_v({}_u\eta),{}_v\eta,\eta)$, $\eta\in X,u,v\in S,u\neq v$. 所以由经典场论的结果很自然想到 Q_t 有势的充要条件是 Q_t 沿此种最短闭路所作的"功"为零, 这就是定理的条件用"功"的语言表达.

证. 首先我们证明最后的结论. 若 Q_t 有势 V, 则由 (3.3), (1.3),(1.5)知 $u\in S,\forall\eta\in X$,

$$\begin{aligned}\log c(u,\eta)-\log c(u,{}_u\eta)&=\log q_t(\eta,{}_u\eta)-\log q_t({}_u\eta,\eta)\\&=\varphi(\eta,{}_u\eta)=V({}_u\eta)-V(\eta).\end{aligned}$$

再证定理的前一部份.

由(3.1),(3.3)知 Q_t 满足零同性条件, 从而 Q_t 是一个场. 为了叙述方便,我们引进一些记号.

定义变换 $T(u):X\to X$, $\eta T(u)={}_u\eta$, $u\in S,\eta\in X$. 于是对 Q_t 中每一条路 $L=(\eta_0,\cdots,\eta_n)$, $\exists u_k\in S$, $k=1, 2, \cdots,n$ 使 $\eta_0=\eta$, $\eta_k=\eta T(u_1)\cdots T(u_k)$, $k=1,2,\cdots,n$. 为书写简便,我们也用

$$\eta T(u_1)\cdots T(u_n)\tag{4.2}$$

表示这条路 L. 其中 η 是 L 的出发点, 而 $T(u_k)$ 可以表示由 $\eta T(u_1)\cdots T(u_{k-1})$ 到 $\eta T(u_1)\cdots T(u_k)$ 的一节路. 特别 $\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_n))$ 表示场 Q_t 在 L 上所作的功. 由 φ 的定义知

$$\begin{aligned}\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_n))&=\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_k))\\&\quad+\varphi(\eta_k T(u_{k+1})\cdots T(u_n))\end{aligned}\tag{4.3}$$

对任何 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 成立,其中 $\eta_k=\eta T(u_1)\cdots T(u_k)={}_{u_k}({}_{u_{k-1}}(\cdots({}_{u_1}\eta)\cdots))$, 并记 ${}_{u_k}({}_{u_{k-1}}(\cdots({}_{u_1}\eta)\cdots))={}_{u_k}\cdots{}_{u_1}\eta$. 利用这些记号,(4.1)可写成

$$\varphi(\eta T(u)T(v))=\varphi(\eta T(v)T(u)),\tag{4.4}$$

$$u, v \in S, \quad u \neq v, \quad \eta \in X$$

显然有

(4.5) $$\varphi(\eta T(u)T(u)) = 0, \quad u \in S, \quad \eta \in X.$$

现在证明条件的充分性.即证：在假设(4.1)(亦即(4.4))下，对任一闭路L(不妨设为上述的L，但其 $\eta_n = \eta_0 = \eta$) 有

(4.6) $$\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_n)) = 0.$$

由L为闭路知n只能为偶数，设 $n = 2m$. 今对m使用数学归纳法。当$m = 1$时，$u_1 = u_2$，由(4.5)知此时(4.6)成立。设对 $m - 1$ 的情形(4.6)成立，往证m的情形。此时必存在 $k \in \{2, \cdots, n\}$ 使 $u_k = u_1$(否则 $\eta_n = \eta T(u_1)\cdots T(u_n) \neq \eta$) 且 $u_l \neq u_1, l \in \{2, \cdots, k-1\}$. 应用 (4.3)、(4.4)得

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_1)T(u_2)) + \varphi((_{u_2u_1}\eta)T(u_3)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)T(u_1)) + \varphi((_{u_1u_2}\eta)T(u_3)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)T(u_1)T(u_3)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)) + \varphi((_{u_2}\eta)T(u_1)T(u_3)\cdots T(u_n))
\end{aligned}
$$

反复应用此式及(4.3)即得

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\eta T(u_1)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)) + \varphi((_{u_2}\eta)T(u_3)) \\
&\qquad + \varphi((_{u_3u_2}\eta)T(u_1)T(u_4)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)T(u_3)) \\
&\qquad + \varphi((_{u_3u_2}\eta)T(u_1)T(u_4)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)T(u_3)T(u_4)) \\
&\qquad + \varphi((_{u_4u_3u_2}\eta)T(u_1)T(u_5)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \cdots \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)\cdots T(u_{k-1})) \\
&\qquad + \varphi((_{u_{k-1}\cdots u_2}\eta)T(u_1)T(u_k)\cdots T(u_n)) \\
&\quad = \varphi(\eta T(u_2)\cdots T(u_{k-1}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\varphi(({}_{u_{k-1}\cdots u_2}\eta)T(u_1)T(u_k))\\
&+\varphi(({}_{u_k u_1 u_{k-1}\cdots u_2}\eta)T(u_{k+1})\cdots T(u_n))\\
=\ &\varphi(\eta T(u_2)\cdots T(u_{k-1}))\\
&+\varphi(({}_{u_{k-1}\cdots u_2}\eta)T(u_{k+1})\cdots T(u_n))\\
=\ &\varphi(\eta T(u_2)\cdots T(u_{k-1})T(u_{k+1})\cdots T(u_n))=0
\end{aligned}
$$

其中倒数第二步用到(4.5)及 $u_k=u_1$，最后一步是归纳假设。故由数学归纳法知(4.6)对任何闭路成立。

至于条件的必要性显然。□

5. 定理 设(3.2)成立，且 $Q_c=\{q_c(\eta,\tilde{\eta}):\eta,\ \tilde{\eta}\in X\}$ 由(3.4)定义。则 Q_c 有势的充要条件是

$$
(5.1)\quad \begin{cases}\forall u,\ v,\ w\in S,\ \forall \eta\in X\\ c(u,v,\eta)c(v,w,{}_{(w,u)}\eta)c(w,u,{}_{(w,u)}\eta)\\ \quad =c(w,u,\eta)c(w,v,{}_{(u,w)}\eta)c(v,u,{}_{(v,u)}\eta)).\end{cases}
$$

证. i) 与定理 4 的证明类似.我们先采用以下记号：若 $\eta_u\neq\eta_v$，则定义 $\eta T(u,v)\triangleq(u,v)\eta$（此处 $T(u,v)$ 不是 X 上的映射，这一点与定理有所不同）。于是每一条路 $L=(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$\eta_0=\eta$ 可用 $\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_n,v_n)$ 来刻划。它表示由 $\eta_0=\eta$，$\eta_k=\eta_{k-1}T(u_k,v_k)$，$k=1,\cdots,n$ 组成的路；同时也将 $T(u_k,v_k)$ 理解为第 k 节路. 在这些记号及第 1，3 两目的记号下，经过计算可知(留给读者作习题)条件(5.1)等价于

$$
(5.2)\quad \begin{cases}\forall u,v,w\in S\ \text{两两不同},\ \forall\eta\in X,\ \eta(u)\neq\eta(v),\\ \qquad \eta(v)=\eta(w),\\ \varphi(\eta T(u,v)T(v,w))=\varphi(\eta T(u,w)).\end{cases}
$$

此外显然有 $T(u,v)=T(v,u)$，$u\neq v$，及

$$
(5.3)\quad \forall\eta\in X,\eta(u)\neq\eta(v),u,v\in S,\ \varphi(\eta T(u,v)T(v,u))=0
$$

$$
(5.4)\quad \begin{cases}\varphi(\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_n,v_n))\\ \qquad =\varphi(\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_k,v_k))\\ \qquad\qquad +\varphi(\eta_k T(u_{k+1},v_{k+1})\cdots T(u_n,\ v_n)),\end{cases}
$$

其中 $\eta_k = \eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_k,v_k), k=1,2,\cdots,n-1$.

ii) 由于在(5.2)的条件下，$\eta T(u,v)T(v,w)=\eta T(u,w)$，所以条件(5.1)的必要性显然.故只须证条件(5.1)，亦即条件(5.2)的充分性。为此先证

$$
(5.5)\qquad \begin{cases}\varphi(\eta T(u,v)T(u_1,v_1)) = \varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v))\\ u_1,v_1,u,v \text{ 两两不同}, \eta_{u_i} \neq \eta_{v_i},\ i=1,2\end{cases}
$$

此时有 $\eta(u_1)=\eta(u)\neq\eta(v_1)=\eta(v)$ 或 $\eta(u_1)=\eta(v)\neq\eta(u)=\eta(v_1)$，不失其一般性可设前者成立。从而 $\eta T(u_1,v)$ 有意义。于是

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1)T(u,v))\\
\underline{\underline{(5.3)}}\ &\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1)T(u,v))\\
&+\varphi(\eta T(u_1,v)T(v,u_1))\\
\underline{\underline{(5.4)}}\ &\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v)T(v,u_1))\\
\underline{\underline{(5.4)}}\ &\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1))\\
&+\varphi(_{(u,v)}\eta)T(u,v)T(u_1,v))+\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))\\
\underline{\underline{(5.2)}}\ &\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1))+\varphi(_{(u,v)}\eta)T(u,u_1))\\
&+\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))\\
\underline{\underline{(5.4)}}\ &\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(u_1,v_1)T(u,u_1))+\\
&\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))
\end{aligned}
$$

上面最后三步的实质是用(5.2)将 $T(u,v)T(u_1,v)$ 换成 $T(u,u_1)$.应用同一推导手法化简上式最后一步的第一项即知最后一步

$$
\begin{aligned}
&=\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u,v)T(v_1,u))+\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))\\
&=\varphi(\eta T(u_1,v_1)T(v,v_1))+\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))\\
&=\varphi(\eta T(u_1,v))+\varphi(_{(u_1,v)}\eta)T(v,u_1))\\
&=\varphi(\eta T(u_1,v)T(v,u_1))\ \underline{\underline{(5.3)}}\ 0.
\end{aligned}
$$

这就是(5.5)。

iii) 今往证(5.2)的充分性。即证对任一闭路

$$L=(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1},\eta_0)=\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_n,v_n)$$

(此处 $\eta=\eta_0$) 来说,

$$\varphi(\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_n,v_n))=0. \tag{5.6}$$

对 n 用数学归纳法来证明。当 $n=2$ 时(5.6)即(5.3),因而成立.当 $n=3$ 时, $\eta T(u_1,v_1)T(u_2,v_2)=\eta T(u_3,v_3)$, 且 $\eta(u_3)\neq\eta(v_3)$, 由此即知 $\{u_1,v_1\}\cap\{u_2,v_2\}$ 的元数不能是 0 和 2,因而只能是 1,即 u_1,v_1 与 u_2,v_2 恰有一相同。不妨设 $v_1=v_2$. 由 $T(u,v)$ 定义的约定即知 $\eta(u_1)\neq\eta(v_1)$, ${}_{(u_1,v_1)}\eta(u_2)\neq{}_{(u_1,v_1)}\eta(v_1)$, 由后一式即得 $\eta(u_2)\neq\eta(u_1)$, 从而 $\eta(u_2)=\eta(v_1)$, 故当 $n=3$ 时,(5.6)即(5.2),因而成立。

设(5.6)对 $n<m$ 成立,往证(5.6)对 $n=m$ 成立。

因为 L 是闭路,所以 $u_k,v_k,k=1,\cdots,m$ 都出现偶数次,从而存在一 $k\in\{2,\cdots,m\}$ 使得

$$\{u_1,v_1\}\cap\{u_k,v_k\}\neq\phi,\ \{u_1,v_1\}\cap\{u_l,v_l\}=\phi,\ 2\leqslant l\leqslant k. \tag{5.7}$$

因 $T(u,v)=T(v,u)$, 所以不失其一般性可设

$$u_1=u_k, \tag{5.8}$$

并暂设 $k>2$, 记 $\tilde\eta\triangleq\eta T(u_1,v_1)T(u_2,v_2)$. 由(5.4),(5.5)得

$$\begin{aligned}
&\varphi(\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_n,v_n))\\
&\overset{(5.4)}{=\!=}\ \varphi(\eta T(u_1,v_1)T(u_2,v_2))\\
&\qquad+\varphi(\tilde\eta T(u_3,v_3)\cdots T((u_m,v_m))\\
&\overset{(5.5)}{=\!=}\ \varphi(\eta T(u_2,v_2)T(u_1,v_1))+\varphi(\tilde\eta T(u_3,v_3)\cdots T(u_m,v_m))\\
&\overset{(5.4)}{=\!=}\ \varphi(\eta T(u_2,v_2)T(u_1,v_1)T(u_3,v_3)\cdots T(u_m,v_m)),
\end{aligned}$$

重复上述手法,并注意到(5.7)即得

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta T(u_1,v_1)\cdots T(u_m,v_m))
&=\varphi(\eta T(u_2,v_2)\cdots T(u_{k-1},v_{k-1})T(u_1,v_1)\\
&\quad\cdot T(u_k,v_k)\cdots T(u_m,v_m))
\end{aligned} \tag{5.9}$$

当 $k=2$ 时,(5.9)自然成立(此时两边一样!).

若 $v_1=v_k$,暂记 $\hat\eta=\eta T(u_2,v_2)\cdots T(u_{k-1},v_{k-1})$ (当 $k=2$

时 $\hat{\eta}$ 即 η)，则(5.9)的后端

$$\stackrel{(5.4)}{=} \varphi(\eta T(u_2, v_2)\cdots T(u_{k-1}, v_{k-1})) + \varphi(\hat{\eta} T(u_1, v_1) T(u_k, v_k)) + \varphi(\eta_k T(u_{k+1}, v_{k+1})\cdots T(u_m, v_m))$$

$$\stackrel{(5.3)}{=} \varphi(\eta T(u_2,v_2)\cdots T(u_{k-1},v_{k-1})) + \varphi(\eta_k T(u_{k+1},v_{k+1})\cdots T(u_m,v_m))$$

$$= \varphi(\eta T(u_2,v_2)\cdots T(u_{k-1},v_{k-1}) T(u_{k+1},v_{k+1}) \cdot \cdots T(u_m,v_m)),$$

于是由 $m-2$ 的情形知(5.6)对 $n=m$的这种情形为真。

若 $v_1 \neq v_k$，则(5.9)的后端

$$= \varphi(\eta T(u_2, v_2)\cdots T(u_{k-1}, v_{k-1})) + \varphi(\hat{\eta} T(u_1, v_1) T(u_k, v_k)) + \varphi(\eta_k T(u_{k+1}, v_{k+1})\cdots T(u_m, v_m))$$

$$\stackrel{(5.2)}{=} \varphi(\eta T(u_2,v_2)\cdots T(u_{k-1}, v_{k-1})) + \varphi(\hat{\eta} T(v_1,v_k)) + \varphi(\eta_k T(u_{k+1},v_{k+1})\cdots T(u_m,v_m))$$

$$= \varphi(\eta T(u_2, v_2)\cdots T(u_{k-1}, v_{k-1}) T(v_1, v_k) \cdot T(u_{k+1},v_{k+1})\cdots T(u_m,v_m))$$

于是由 $m-1$ 的情形知(5.6)对 $n=m$的这种情形也真。

故由第二数学归纳法知(5.6)对任何 n 成立从而条件(5.2)的充分性获证。□

6. 例(1) 设伊辛模型的交互作用势 $\Phi:\mathscr{S}\backslash\{\phi\}\to R$ 满足

$$\forall u \in S,\quad \sum_{A \ni u} |\Phi(A)| < \infty \tag{6.1}$$

则伊辛速度函数

$$c(u,\eta) = \exp\left\{-\beta \sum_{A \ni u} \Phi(A)\chi_A(\eta)\right\},\ \beta > 0,\ u \in S,\ \eta \in X, \tag{6.2}$$

有势，其中

$$(6.3)\qquad \chi_A(\eta)=\prod_{u\in A}(2\eta_u-1),\ \eta\in X,\ A\in\mathscr{S}.$$

证. 由(6.3)容易验证

$$(6.4)\qquad \forall u\in S,\ \forall\eta\in X,\quad \chi_A({}_u\eta)=(-1)^{|A\cap\{u\}|}\chi_A(\eta).$$

为证(6.2)有势,只需验证(4.1)成立.而当 $u=v$ 时,(4.1)恒成立.当 $u\neq v$ 时,由(6.2),(6.4)得

$$\begin{aligned}
&c(u,\eta)c(v,{}_u\eta)c(v,{}_v({}_u\eta))c(v,{}_v\eta)\\
&=\exp\Big\{-\beta\Big[\sum_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)\\
&\qquad+\sum_{A\ni v}\Phi(A)(-1)^{|A\cap\{u\}|}\chi_A(\eta)\\
&\qquad-\sum_{A\ni u}\Phi(A)(-1)^{|A\cap\{v\}|}\chi_A(\eta)-\sum_{A\ni v}\Phi(A)\chi_A(\eta)\Big]\Big\}\\
&=\exp\Big\{-2\beta\Big[\sum_{A\ni u,v}\Phi(A)\chi_A(\eta)\\
&\qquad-\sum_{A\ni u,v}\Phi(A)\chi_A(\eta)\Big]\Big\}=1.
\end{aligned}$$

同法可证: $c(v,\eta)c(u,{}_v\eta)c(v,{}_u({}_v\eta))c(u,{}_v\eta)=1$. 故当 $c(u,\eta)$ 由(6.2)给出时, (4.1) $\forall u,\ v\in S,\ \forall\eta\in X$ 成立. 故由定理4知伊辛速度函数有势. □

例 (2) 设格气模型的速度函数

$$(6.5)\ c(u,v,\eta)=\begin{cases}0, & \eta(u)=\eta(v),\\ \eta(u)c(u,\eta)p(u,v)+\eta(v)c(v,\eta)\cdot p(v,u), & \\ & \eta(u)\neq\eta(v).\end{cases}$$

其中 $c(u,\eta)$ 由(6.2)给出, Φ 满足(6.1), $p(u,u)=0$, $p(u,v)>0$, $u\neq v$, 且满足

$$\begin{aligned}(6.6)\qquad & p(u,v)p(v,w)p(w,u)\\ &=p(u,w)p(w,v)p(v,u),\ u,v,w\in S,\end{aligned}$$

则格气速度函数有势.

证. 由定理 5 的证明知只需验证 (5.1) 中的等式对任何两两不同的 $u,v,w\in S$ 及 $\eta(u)\neq\eta(v)=\eta(w)$成立即可(即(5.2)式). 当$\eta(u)=1$, $\eta(v)=\eta(w)=0$ 时,由(6.5),(6.6)易见(5.1)中的等式成立. 因此问题归结为验证: 当 $u,v,w\in S$ 两两不同,

$$\eta(u)=0,\ \eta(v)=\eta(w)=1$$

时,(5.1)中的等式用(6.5)代入时成立. 而由(6.5),(6.6)易见此时只需验证:

$$(6.7)\qquad \begin{cases}\forall u,\ v,\ w\in S \text{ 两两不同},\ \forall\eta\in X,\eta(u)=0,\\ \quad \eta(v)=\eta(w)=1,\\ c(v,\ \eta)c(w,\ _{(u,v)}\eta)c(u,\ _{(w,u)}\eta)\\ \quad =c(w,\ \eta)c(v,\ _{(u,w)}\eta)c(u,\ _{(u,v)}\eta).\end{cases}$$

首先容易验证:

$$(6.8)\qquad \forall u,v\in S,\ u\neq v,\quad \chi_A(_{(u,v)}\eta)=(-1)^{|A\cap\{u,v\}|}\chi_A(\eta).$$

于是由(6.2)及(6.8)得

$$\begin{aligned}&c(v,\ \eta)c(w,\ _{(u,v)}\eta)c(u,\ _{(w,u)}\eta)\\ &=\exp\Big\{\beta\Big[\sum_{A\ni v}\Phi(A)\chi_A(\eta)+\sum_{A\ni w}\Phi(A)\chi_A(\eta)(-1)^{|A\cap\{u,v\}|}\\ &\qquad+\sum_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)(-1)^{|A\cap\{w,u\}|}\Big]\Big\}\\ &=\exp\Big\{\beta\Big[3\sum_{|A\cap\{u,v,w\}|=3}\Phi(A)\chi_A(\eta)\\ &\qquad+\sum_{|A\cap\{u,v,w\}|=1}\Phi(A)\chi_A(\eta)-2\sum_{\substack{A\ni u\\ A\ni v,w}}\Phi(A)\chi_A(\eta)\Big]\Big\}\\ &=c(w,\ \eta)c(v,\ _{(u,w)}\eta)c(u,\ _{(u,v)}\eta).\ \square\end{aligned}$$

特别,简单对称排它速度函数

$$c(u,v,\eta)=\begin{cases}0, & \eta(u)=\eta(v),\\ (\eta(u)+\eta(v))p(u,v), & \eta(u)\neq\eta(v),\end{cases}$$

其中 $p(u,u)=0$, $p(u,v)=p(v,u)>0$, $u\neq v$, 有势.

§3 可逆测度集与Gibbs态集的关系与构造

本节先讨论自旋变相速度函数(相应地：排它速度函数)有势条件下，Gibbs 态集(相应地：正则 Gibbs 态集)的构造，然后证明可逆测度与 Gibbs 态集(正则 Gibbs 态集)相等。为此需要先证明它们的势及规范的一些性质。

1. 引理 (i) 设 $c(\cdot,\cdot):S\times X\to(0,\infty)$ 有势V且 $\forall u\in S$ $c(u,\cdot)\in C_b(X)$，则 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，

$$V(\cdot)-V(\theta_\Lambda\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\in C_b(X), \tag{1.1}$$

其中 $\theta=\{\theta_u:u\in S\}\in X$，$\theta_u\equiv0$，$u\in S$.

(ii) 设 $c(\cdot,\cdot,\cdot):S\times S\times X\to[0,\infty)$，$c(u,v,\eta)>0$ 当且仅当 $\eta(u)\neq\eta(v)$，$\forall u,v\in S$，$c(u,v,\cdot)\in C_b(X)$. 且它有势V，$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall k\in\{0,\cdots,|\Lambda|\}$，任意取定 $\xi(\Lambda,k)\in X_k(\Lambda)$，则

$$I_{X_k(\Lambda)}((\cdot)_\Lambda)[V(\cdot)-V(\xi(\Lambda,k)\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})]\in C_b(X). \tag{1.2}$$

证. (1) 由势的定义及 $\forall u\in S$，$c(u,\cdot)\in C_b(X)$ 知 $\forall u\in S$，$\Delta_uV\in C_b(X)$. 今先证(1.1) $\forall\Lambda=\{u\}$成立。为此只需证 $\forall\{\eta^{(m)}\}\subset X$，$\eta^{(m)}\to\eta(m\to\infty)$ 有

$$V(\eta^{(m)})-V(0\times(\eta^{(m)})_{S\setminus\{u\}})\to V(\eta)-V(0\times\eta_{S\setminus\{u\}}) \tag{1.3}$$

由 $\eta^{(m)}\to\eta$ 知$\exists m_0$ 使当 $m\geqslant m_0$ 时 $\eta^{(m)}(u)=\eta(u)$. 于是当 $\eta(u)=0$，$m\geqslant m_0$ 时，(1.3) 中两个式子的值都是 0，因而成立；当 $\eta(u)=1$，$m\geqslant m_0$ 时，由 $\Delta_uV\in C_b(X)$ 知

$$\begin{aligned}V(\eta^{(m)})-V(0\times(\eta^{(m)})_{S\setminus\{u\}})&=\Delta_uV(0\times(\eta^{(m)})_{S\setminus\{u\}})\\&\to\Delta_uV(0\times\eta_{S\setminus\{u\}})=V(\eta)-V(0\times\eta_{S\setminus\{u\}}).\end{aligned}$$

其次令 $\Lambda=\{u_1,\cdots,u_k\}\in\mathscr{S}$，$\Lambda_l=\{u_1,\cdots,u_l\}$，$l=1,\cdots,k$，$\Lambda_0=\phi$，则由(1.1)对 $\Lambda=\{u\}$ 的情形及

$$V(\eta)-V(\theta_\Lambda\times\eta_{S\setminus\Lambda})$$
$$=\sum_{l=1}^{k}[V(\theta_{\Lambda_{l-1}}\times\eta_{S\setminus\Lambda_{l-1}})-V(\theta_{\Lambda_l}\times\eta_{S\setminus\Lambda_l})]$$

知(1.1)成立。

(2) 为了证明 (ii)，先证明： $\forall\{\eta^{(m)}\}\subset X$， $\eta^{(m)}\to\eta(m\to\infty)$ 有

(1.4) $\quad\forall u,v\in S$， $u\neq v$ $\Delta_{(u,v)}V(\eta^{(m)})\to\Delta_{(u,v)}V(\eta)$。

由 $\eta^{(m)}\to\eta$ 知 $\exists m_0$ 使当 $m\geq m_0$ 时，$(\eta^{(m)})_{\{u,v\}}=\eta_{\{u,v\}}$，于是 $c(u,v,\cdot)\in C_b(X)$ 及势的定义得知

$$\Delta_{(u,v)}V(\eta^{(m)})=\Delta_{(u,v)}(\eta_{\{u,v\}}\times(\eta^{(m)})_{S\setminus\{u,v\}})$$
$$=\left\{\begin{array}{ll}0, & \eta(u)=\eta(v)\\ \log c(u,v,\eta_{\{u,v\}}\times\eta^{(m)}_{S\setminus\{u,v\}})-\log c(u,v,(u,v) & \\ \quad\cdot({}_{(u,v)}\eta_{\{u,v\}})\times\eta^{(m)}_{S\setminus\{u,v\}}), & \eta(u)\neq\eta(v)\end{array}\right\}$$
$$\to\left\{\begin{array}{ll}0, & \eta(u)=\eta(v)\\ \log c(u,v,\eta)-\log c(u,v,{}_{(u,v)}\eta), & \\ & \eta(u)\neq\eta(v)\end{array}\right\}$$
$$=\Delta_{(u,v)}V(\eta).$$

记 $\Lambda=\{u_1,\cdots,u_n\}$，$(\sigma(1),\cdots,\sigma(n))$ 表示$(1,2,\cdots,n)$ 的任一个排列，$\sigma(\eta_\Lambda)\in X(\Lambda)$ 用 $\sigma(\eta_\Lambda)(u_k)\triangleq\eta(u_{\sigma(k)})$，$k=1,2,\cdots,n$ 规定。则由“任一排列是对换的乘积”这一代数定理及(1.4)知：$\forall\{\eta^{(m)}\}\subset X$，$\eta^{(m)}\to\eta(m\to\infty)$ 有

(1.5) $\quad V(\sigma(\eta^{(m)}_\Lambda)\times\eta^{(m)}_{S\setminus\Lambda})-V(\eta^{(m)})\to V(\sigma(\eta_\Lambda)\times\eta_{S\setminus\Lambda})-V(\eta)$。

又当 $\eta_\Lambda\in X_k(\Lambda)$ 时，必有一排列σ 使 $\sigma(\eta_\Lambda)=\xi(k,\Lambda)$，再由 $\eta^{(m)}\to\eta$ 知 $\exists m_0$ 使当 $m\geq m_0$ 时，$(\eta^{(m)})_\Lambda=\eta_\Lambda$，故当 $m\geq m_0$ 时，

$$I_{X_k(\Lambda)}(\eta^{(m)})[V(\eta^{(m)})-V(\xi(k,\Lambda)\times\eta^{(m)}_{S\setminus\Lambda})]$$
$$=I_{X_k(\Lambda)}(\eta_\Lambda)[V(\eta^{(m)})-V(\sigma(\eta_\Lambda^{m})\times\eta^{m}_{S\setminus\Lambda})]$$

$$\rightarrow I_{X_{k}(\Lambda)}(\eta_\Lambda)[V(\eta) - V(\xi(k,\Lambda) \times \eta_{S\setminus\Lambda})],$$
$$(m \rightarrow \infty)$$

即(1.2)获证。□

2. 引理 在引理 1 的假设下,则

(i) 由(1.8.3)定义的规范 $\{f^\Lambda: \Lambda \in \mathscr{S}\}$ 与 $c(\cdot,\cdot)$ 的势的选择无关,且满足

(2.1) $f^\Lambda \in C_b(X)$ 且 $\forall \eta \in X$, $f^\Lambda(\eta) > 0$;

(2.2) $\forall \eta \in X$, $\sum_{w \in X(\Lambda)} f^\Lambda(w \times \eta_{S\setminus\Lambda}) = 1$;

(2.3) $\forall \Lambda \subset \tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}, \forall \eta \in X$, $f^{\tilde\Lambda}(\eta) = f^\Lambda(\eta) \sum_{w \in X(\Lambda)} f^{\tilde\Lambda}(w \times \eta_{S\setminus\Lambda})$.

(ii) 由 (1.9.3) 定义的 $\{f_k^\Lambda: \Lambda \in \mathscr{S}, k = 0, \cdots, |\Lambda|\}$ 与 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的势选择无关,且满足

(2.4) $0 \leqslant f_k^\Lambda \in C_b(X)$, 当 $\eta_\Lambda \in X_k(\Lambda)$ 时, $f_k^\Lambda(\eta) > 0$;

(2.5)
$$\forall \eta \in X, \sum_{w \in X(\Lambda)} f_k^\Lambda(w \times \eta_{S\setminus\Lambda}) = \sum_{w \in X_k(\Lambda)} f_k^\Lambda(w \times \eta_{S\setminus\Lambda}) = 1;$$

(2.6) $\forall \Lambda \subset \tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}$, $\forall \xi_1 \in X(\Lambda)$, $\forall \xi_2 \in X(\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda)$,
$\forall \zeta \in X(S\setminus\Lambda), \forall k \in \{0, \cdots, |\tilde{\Lambda}|\}$,

$$f_k^{\tilde\Lambda}(\xi_1 \times \xi_2 \times \zeta) = f_{|\xi_1|}^\Lambda(\xi_1 \times \xi_2 \times \zeta) \sum_{\xi \in X_{|\xi_1|}(\Lambda)} f_k^{\tilde\Lambda}(\xi \times \xi_2 \times \zeta).$$

证. (i) 将定理 2.2 的最后一个结论应用到 $c(\cdot,\cdot)$决定的场 Q_S 上,并注意 η 与 $w \times \eta_{S\setminus\Lambda}$, $w \in X(\Lambda)$ 属于同一X_l (§2的 $X_l(t)$ 在目前与 t 无关,故记成 X_l) 即知 f^Λ 与 $c(\cdot,\cdot)$ 的势选择无关. 设V为 $c(\cdot,\cdot)$ 的任一势,则由引理 1(i) 知

$$f^{\Lambda}(\cdot)=\frac{\exp\{V(\cdot)-V(\theta_{\Lambda}\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\}}{\sum\limits_{w\in X(\Lambda)}\exp\{V(w\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})-V(\theta_{\Lambda}\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\}}$$

$$\in C_b(X),$$

显然 $\forall\eta\in X$，$f^{\Lambda}(\eta)>0$，故(2.1)成立．(2.2)显然成立． 再由(1.8.3) 知当 $\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{S}$ 时，$\forall\eta\in X$ 有

$$f^{\Lambda}(\eta)=\frac{\exp V(\eta)}{\sum\limits_{w\in X(\Lambda)}\exp V(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}$$

$$\cdot\sum_{w\in X(\Lambda)}\frac{\exp V(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}{\sum\limits_{\bar{w}\in X(\tilde{\Lambda})}\exp V(\bar{w}\times\eta_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=f^{\Lambda}(\eta)\cdot\sum_{w\in X(\Lambda)}f^{\Lambda}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda}).$$

(ii) 将定理 2.2 的最后的结论用到 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 决定的场 Q_c (见 (2.3.4)) 上，并注意当 $\xi,w\in X_k(\Lambda)$ 时，$\xi\times\zeta$ 与 $w\times\zeta$ 属于同一 X_l． 即知 f_k^{Λ} 与 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的势的选择无关． 设 V 是 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的任一势，则由引理 1(ii) 及(1.9.3)知

$$f_k^{\Lambda}(\cdot)=I_{X_k(\Lambda)}((\cdot)_{\Lambda})$$

$$\cdot\frac{\exp\{V(\cdot)-V(\xi(k,\Lambda)\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\}}{\sum\limits_{w\in X_k(\Lambda)}\exp\{V(w\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})-V(\xi(k,\Lambda)\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\}}$$

$$\in C_b(X)$$

显然当 $\eta_{\Lambda}\in X_k(\Lambda)$ 时， $f_k^{\Lambda}(\eta)>0$． (2.5) 显然成立． 再由(1.9.3)知当 $|\xi_1\times\xi_2|\neq k$ 时，(2.6)的双方都为零， 当 $|\xi_1\times\xi_2|=k$ 时，

$$f_k^{\Lambda}(\xi_1\times\xi_2\times\zeta)=\frac{\exp V(\xi_1\times\xi_2\times\zeta)}{\sum\limits_{\xi\in X_{|\xi_1|}(\Lambda)}\exp V(\xi\times\xi_2\times\zeta)}$$

$$\cdot \sum_{\xi \in X_{|\xi_1|}(\Lambda)} \frac{\exp V(\xi \times \xi_2 \times \zeta)}{\sum_{w \in X_k(\Lambda)} \exp V(w \times \zeta)}$$

$$= f^{\Lambda}_{|\xi_1|}(\xi_1 \times \xi_2 \times \zeta) \sum_{\xi \in X_{|\xi_1|}(\Lambda)} f^{\Lambda}_k(\xi \times \xi_2 \times \zeta).$$

即(2.6)成立。□

3. 定义 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\mathscr{G}_{\iota,\Lambda}$ 表示一切如下定义的概率测度的弱凸闭包：

(3.1) $\quad \mu_{\Lambda,\zeta}: \mu_{\Lambda,\zeta}(F) \triangleq \sum_{\xi \in F(\zeta)} f^{\Lambda}(\xi \times \zeta),\ F \in \mathscr{F},\ \zeta \in X(S \setminus \Lambda),$

其中 $F(\zeta) \triangleq \{\xi \in X(\Lambda): \xi \times \zeta \in F\}$ 表F在ζ处的截口。$\mathscr{G}_\iota$ 表示一切满足 $\mu_m \in \mathscr{G}_{\iota,\Lambda_m}$，$\Lambda_m \uparrow S$ 的弱收敛序列 $\{\mu_m\}$ 的弱极限组成的集。

$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\mathscr{G}_{c,\Lambda}$ 表示一切概率测度

(3.2) $\quad \mu_{\Lambda,\zeta,k}: \mu_{\Lambda,\zeta,k}(F) \triangleq \sum_{\xi \in F(\xi)} f^{\Lambda}_k(\xi \times \zeta),\ F \in \mathscr{F}.$

$\quad \zeta \in X(S \setminus \Lambda),\ 0 \leqslant k \leqslant |\Lambda|$

的弱凸闭包。$\mathscr{G}_c$ 表示一切满足 $\mu_m \in \mathscr{G}_{c,\Lambda_m}$，$\Lambda_m \uparrow S$ 的弱收敛序列$\{\mu_m\}$ 的弱极限组成的集。

下面的定理是关于 Gibbs 态集及正则 Gibbs 态集的构造定理。

4. 定理 (i)设 $c(\cdot,\cdot): S \times X \to (0\ \infty)$ 有势V 且 $\forall u \in S$，$c(u,\cdot) \in C_b(X)$，则

(4.1) $\quad \mathscr{G}_\iota(V) = \mathscr{G}_\iota \neq \phi.$

(ii) 设 $c(\cdot,\cdot,\cdot): S \times S \times X \to [0,\infty)$ 满足 $c(u,v,\eta) > 0$ 当且仅当 $\eta_u \neq \eta_v$，且 $\forall u, v \in S$，$c(u,v,\cdot) \in C_b(X)$，V是它的一个势，则

(4.2) $\quad \mathscr{G}_c(V) = \mathscr{G}_c \neq \phi.$

证. (一)先证(4.1). 设 $\mu\in\mathscr{G}_t(V)$, 则由(1.8.4)得

(4.3) $\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S},\ \forall\xi\in X(\Lambda),$

$$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\int_{X(S\backslash\Lambda)} f^{\Lambda}(\xi\times\zeta)\mu_{S\backslash\Lambda}(d\zeta),$$

其中 $\mu_{S\backslash\Lambda}$ 为μ在 $X(S\backslash\Lambda)$ 上的投影, 即 $\forall F\in\mathscr{F}_0(S\backslash\Lambda)$, $\mu_{S\backslash\Lambda}(F)=\mu(X(\Lambda)\times F)$. 令 $X(\Lambda)=\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$, $I_n=\{i: i=(i_1,\cdots,i_k),\ i_k=1,2,\cdots,n; k=1,2,\cdots,k\}$,

(4.4) $$A_{n,i}\triangleq\bigcap_{k=1}^{K}A^{\xi_k}_{n,i_k},\quad i\in I_n,\ \xi_k\in X(\Lambda),$$

其中

$$A^{\xi_k}_{n,i_k}\triangleq\left\{\zeta\in X(S\backslash\Lambda):\frac{i_k-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(\xi_k\times\zeta)>\frac{i_k}{n}\right\},$$

$$A^{\xi_k}_{n,n}\triangleq\left\{\zeta\in X(S\backslash\Lambda):\frac{n-1}{n}\leqslant f^{\Lambda}(\xi_k\times\zeta)\leqslant 1\right\}.$$

任意取定 $\zeta_{n,i}\in A_{n,i}$, $i\in I_n$, 则由(4.3)、(4.4)及(3.1)得知 $\forall\xi\in X(\Lambda)$ 有

(4.5) $$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n}\cdot\mu_{S\backslash\Lambda}(A_{ni})\mu_{\Lambda,\zeta_{n,i}}(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)).$$

而

$$\mu_{\Lambda,n}\triangleq\sum_{i\in I_n}\mu_{S\backslash\Lambda}(A_{n,i})\mu_{\Lambda,\zeta_{ni}}\in\mathscr{G}_{t,\Lambda},$$

由附录引理3.8知有一 $\mu^{\Lambda}\in\mathscr{G}_{t,\Lambda}$ 及 $\{n_k\}$ 使 $\mu_{\Lambda,n_k}\Rightarrow\mu^{\Lambda}$. 由附录推论3.7及(4.5)知 $\forall\xi\in X(\Lambda)$

$$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\mu^{\Lambda}(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)),$$

从而有

(4.6) $$\forall\Lambda\in\mathscr{S},\ \forall A\subset X(\Lambda),\ \mu(A\times X(S\backslash\Lambda))=\mu^{\Lambda}(A\times X(S\backslash\Lambda)).$$

于是 $\forall\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S}$, $\Lambda_n\uparrow$, 有 $\mu^{\Lambda_n}\in\mathscr{G}_{t,\Lambda_n}$ 及

(4.7) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}, \ \forall \xi \in X(\Lambda), \ \lim_{n\to\infty} \mu^{\Lambda_n}(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda))$

$$= \mu(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda))$$

(实际上,当 n 充分大时, $\Lambda_n \supset \Lambda$, $\mu^{\Lambda_n}(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda)) = \mu^{\Lambda_n}(\{\xi\} \times X(\Lambda_n\backslash\Lambda) \times X(S\backslash\Lambda_n)) = \mu(\{\xi\} \times X(\Lambda_n\backslash\Lambda) \times X(S\backslash\Lambda)) = \mu(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda)))$. 再由附录推论 3.7 知 $\mu^{\Lambda_n} \Rightarrow \mu$, 故由定义 3 知 $\mu \in \mathscr{G}_1$.

反之, 设 $\mu \in \mathscr{G}_1$, 要证 $\mu \in \mathscr{G}_1(V)$ 就是要证: $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$, $\forall F \in \mathscr{F}_0(S\backslash\Lambda)$ 有

$$\mu(\{\xi\} \times F) = \int_F f^\Lambda(\xi \times \zeta)\mu_{S\backslash\Lambda}(d\zeta). \tag{4.8}$$

由单调类定理知只需证(4.8)对

$$F = \{\tilde{\xi}\} \times X(S\backslash\tilde{\Lambda}), \ \tilde{\Lambda} \supset \Lambda, \ \tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}, \ \xi \in X(\tilde{\Lambda}\backslash\Lambda) \tag{4.9}$$

成立即可。为此先证: (4.8)对 (4.9) 中的F 及

$$\mu = \mu_{\Lambda_m, \zeta_m}, \ \Lambda_m \supset \tilde{\Lambda}, \ \zeta_m \in X(S\backslash\Lambda_m) \tag{4.10}$$

成立. 事实上,此时

$$
\begin{aligned}
(4.8)\ \text{的右方} &= \int_{\{\tilde{\xi}\}\times X(S\backslash\tilde{\Lambda})} f^\Lambda(\xi \times \zeta)(\mu_{\Lambda_m,\zeta_m})_{S\backslash\Lambda}(d\zeta) \\
&\overset{(3.1)}{=\!=} \int_{\{\tilde{\xi}\}\times X(\Lambda_m\backslash\tilde{\Lambda})\times\{\zeta_m\}} f^\Lambda(\xi \times \zeta)(\mu_{\Lambda_m,\zeta_m})_{S\backslash\Lambda}(d\zeta) \\
&= \sum_{\xi' \in X(\Lambda_m\backslash\tilde{\Lambda})} f^\Lambda(\xi \times \tilde{\xi} \times \xi' \times \zeta_m)\mu_{\Lambda_m,\zeta_m}(X(\Lambda) \times \{\tilde{\xi} \\
&\qquad \times \xi' \times \zeta_m\}) \\
&\overset{(3.1)}{=\!=} \sum_{\xi' \in X(\Lambda_m\backslash\tilde{\Lambda})} f^\Lambda(\xi \times \tilde{\xi} \times \xi' \times \zeta_m) \\
&\qquad \cdot \sum_{w \in X(\Lambda)} f^{\Lambda_m}(w \times \tilde{\xi} \times \xi' \times \zeta_m) \\
&\overset{(2.3)}{=\!=} \sum_{\xi' \in X(\Lambda_m\backslash\tilde{\Lambda})} f^{\Lambda_m}(\xi \times \tilde{\xi} \times \xi' \times \zeta_m) \\
&\overset{(3.1)}{=\!=} \mu_{\Lambda_m,\zeta_m}(\{\xi \times \tilde{\xi}\} \times X(S\backslash\tilde{\Lambda})).
\end{aligned}
$$

进一步(4.8)对(4.9)的F及 $\mu_{\Lambda_m\zeta_m}$ (Λ_m 固定)的凸线性组合成立．再设 $\nu_m^{(n)}$ 是 $\mu_{\Lambda_m\zeta_m}$(Λ_m 固定)的凸线性组合且当 $n\to\infty$时 $\nu_m^{(n)}\Rightarrow\nu_m\in\mathscr{G}_{t,\Lambda_m}$， 则由弱收敛的定义及 $f^\Lambda(\xi\times\cdot)\in C_b(X(S\backslash\Lambda))$ 知(4.8) 对 (4.9) 的F及任何 $\mu\in\mathscr{G}_{t,\Lambda_m}$ 成立。 最后设 $\{\Lambda_m\}\subset\mathscr{S}$，$\Lambda_m\uparrow S$，$\mu_m\in\mathscr{G}_{t,\Lambda_m}$，$\mu_m\Rightarrow\mu$，再由弱收敛的定义及

$$f^\Lambda(\xi\times\cdot)\in C_b(X(S\backslash\Lambda))$$

知(4.8)对(4.9)的F及μ成立。故 $\mu\in\mathscr{G}_t(V)$.

综上所证即得 $\mathscr{G}_t(V)=\mathscr{G}_t$， 至于 $\mathscr{G}_t\neq\phi$ 由它的定义及附录引理 3.8 即知。故(4.1)获证。

(二)往证 (4.2)，其证法与 (4.1) 类似． 设 $\mu\in\mathscr{G}_c(V)$，由(1.9.4)得知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall\xi\in X(\Lambda)$，有

$$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\int_X f^\Lambda_{|\eta_\Lambda|}(\xi\times\eta_{S\backslash\Lambda})\mu(d\eta)\tag{4.11}$$

$$=\sum_{k=0}^{|\Lambda|}\int_{X_k(\Lambda)\times X(S\backslash\Lambda)}f^\Lambda_k(\xi\times\eta_{S\backslash\Lambda})\mu(d\eta).$$

令 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}^{X(\Lambda)}$，

$$A_{nki}\triangleq\bigcap_{w\in X(\Lambda)}A^w_{n,k,i(w)},\tag{4.12}$$

其中 $i\triangleq\{i(w):w\in X(\Lambda)\}\in I_n,k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$，$n\geqslant 1$.

$$A^w_{nki(w)}\triangleq\left\{\eta\in X_k(\Lambda)\times X(S\backslash\Lambda):\frac{i(w)-1}{n}\right.$$

$$\left.\leqslant f^\Lambda_k(w\times\eta_{S\backslash\Lambda})<\frac{i(w)}{n}\right\},\ i(w)=1,\cdots,n-1,$$

$$A^w_{nkn}\triangleq\left\{\eta\in X_k(\Lambda)\times X(S\backslash\Lambda):\frac{n-1}{n}\leqslant f^\Lambda_k(w\times\eta_{S\backslash\Lambda})\leqslant 1\right\}$$

任取定 $\zeta_{nki}\in X(S\backslash\Lambda)$， $\xi_{nki}\in X_k(\Lambda)$ 使 $\xi_{nki}\times\zeta_{nki}\in A_{nki}$，$i\in I_n,k\in\{0,1,\cdots|\Lambda|\}$，$n\geqslant 1$，则由(4.11)、(4.12)及(3.2)得知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall\xi\in X(\Lambda)$ 有

$$(4.13)\qquad \mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{|\Lambda|}\cdot\sum_{i\in I_n}\mu(A_{nki})\mu_{\Lambda,\zeta_{nki},k}(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))$$

而

$$\mu_{\Lambda,n}\triangleq\sum_{k=0}^{|\Lambda|}\sum_{i\in I_n}\mu(A_{nki})\mu_{\Lambda,\zeta_{nki},k}\in\mathscr{G}_{e,\Lambda},$$

由附录引理 3.8 知有一 $\mu^\Lambda\in\mathscr{G}_{e,\Lambda}$ 及 $\{n_k\}$ 使 $\mu_{\Lambda,n_k}\Rightarrow\mu^\Lambda(k\to\infty)$，由附录推论 3.7 及(4.13)知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall\xi\in X(\Lambda)$ 有

$$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))=\mu^\Lambda(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)),$$

以下和(一)完全一样，可证得 $\mu\in\mathscr{G}_e$。

反之，设 $\mu\in\mathscr{G}_e$，要证 $\mu\in\mathscr{G}_e(V)$ 就是要证：$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$，$\forall\xi\in X_k(\Lambda)$，$\forall F\in\mathscr{F}_0(S\backslash\Lambda)$ 有

$$(4.14)\qquad \mu(\{y\}\times F)=\int_{X_k(\Lambda)\times F}f_k^\Lambda(\xi\times\eta_{S\backslash\Lambda})\mu(d\eta).$$

同(一)一样，由单调类定理知只需证：(4.14)对 (4.9) 的 F 成立即可。首先仿(一)可证：(4.14)对(4.9)的 F 及

$$\mu=\mu_{\Lambda_m,\zeta_m,k_1},\ \Lambda_m\supset\tilde{\Lambda},\ \zeta_m\in X(S\backslash\Lambda_m),\ k_1\in\{0,\cdots,|\Lambda_m|\}$$

成立(用 (3.2)，(2.6) 分别代替（一）中相应证明过程的 (3.1)，(2.3))。再证 (4.14) 对(4.9)的 F 及 $\mu_m\in\mathscr{G}_{e,\Lambda_m}$ 成立。最后设 $\{\Lambda_m\}\subset\mathscr{S}$，$\Lambda_m\uparrow S$，$\mu_m\in\mathscr{G}_{e,\Lambda_m}$，$\mu_m\Rightarrow\mu$，则由弱收敛定义及 $f_k^\Lambda(\xi\times\cdot)\in C_b(X(S\backslash\Lambda))$知(4.14)对(4.9)的 F 成立. 故 $\mu\in\mathscr{G}_e(V)$，因此 $\mathscr{G}_e(V)=\mathscr{G}_e$，再由 $\mathscr{G}_e$ 的定义及附录引理 3.8 知 $\mathscr{G}_e\neq\phi$，故 (4.2)获证。□

5. 注 由于 $\mathscr{G},\mathscr{G}_e$ 是构造性地定义出来的，因此定理 4 证明了定义 3 是 $\mathscr{G}(V),\mathscr{G}_e(V)$ 的构造性定义。对于一些具体例子，$\mathscr{G}$，可以很具体地描述。例如当伊辛模型的交互作用势 Φ 给定且满足 (2.6.1) 时，虽然它的势不好写出，但是可以证明它的规范

$$(5.1)\qquad f^{\Lambda}(\eta)=\frac{\exp\left\{+\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}}{\sum\limits_{w\in X(\Lambda)}\exp\left\{+\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})\right\}},$$

$$\eta\in X,\Lambda\in\mathscr{S}\quad .$$

事实上,用 $g^{\Lambda}(\eta)$ 表示(5.1)中等式的右端,则 $\forall u\in\Lambda$, 由(2.6.4),(2.6.2)及例 2.6(1), f^{Λ} 的定义知

$$\frac{g^{\Lambda}({}_u\eta)}{g^{\Lambda}(\eta)}=\frac{\exp\left\{+\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A({}_u\eta)\right\}}{\exp\left\{+\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}}$$

$$=\exp\left[+\beta\sum_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\eta)((-1)^{A\cap\{u\}}-1)\right]$$

$$=\exp\left[-2\beta\sum_{A\in u}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right]=\frac{c(u,\eta)}{c(u,{}_u\eta)}$$

$$=\exp[V({}_u\eta)-V(\eta)]=\frac{f^{\Lambda}({}_u\eta)}{f^{\Lambda}(\eta)},$$

其中V为 $c(u,\eta)$ 的势. 于是由比例性质知

$$\frac{f^{\Lambda}(\eta)}{g^{\Lambda}(\eta)}=\frac{f^{\Lambda}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}{g^{\Lambda}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=\frac{\sum\limits_{w\in X(\Lambda)}f^{\Lambda}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}{\sum\limits_{w\in X(\Lambda)}g^{\Lambda}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})}=\frac{1}{1}=1$$

故(5.1)获证.

有了(5.1)式, $\mathscr{G}_{t,\Lambda}$ 以及 $\mathscr{G}_t$ 的描述应该说是相当具体了.

6. 註 由定理 4 的证明可知: $\mu\in\mathscr{G}_t(V)$ 当且仅当(4.3)成立; $\mu\in\mathscr{G}_e(V)$ 当且仅当(4.13) $\forall\Lambda\in\mathscr{S},\forall\xi\in X(\Lambda)$ 成立.

事实上, $\mu\in\mathscr{G}_t(V)$ 显然有(4.3),而由定理 4 的证明(一)知(4.3)$\Rightarrow\mu\in\mathscr{G}_t\Rightarrow\mu\in\mathscr{G}_t(V)$. 由定理 4 的证(二)知$\mu\in\mathscr{G}_e(V)\Rightarrow$(4.13)$\forall\Lambda\in\mathscr{S},\forall\xi\in X(\Lambda)$ 成立$\Rightarrow\mu\in\mathscr{G}_e\Rightarrow\mu\in\mathscr{G}_e(V)$.

现在我们证明自旋变相速度函数(排它速度函数)的可逆测度与 Gibbs 态(正则 Gibbs 态)的等价性,即

7. 定理 (i) 设正自旋变相速度函数 $c(u,\eta)$ $u\in S,\eta\in X$ 有势 V, 且 $\forall u\in S$, $c(u,\cdot)\in C_b(X)$, 则

$$\mathscr{R}(\bar{\Omega})=\mathscr{G}_t(V). \tag{7.1}$$

其中 $\bar{\Omega}$ 为由定理 1.2.7 定义的算子 Ω 的闭包。

(ii) 设排它速度函数 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$: $S\times S\times X\to[0,\infty)$, $c(u,v,\eta)>0$ 当且仅当 $\eta_u\neq\eta_v$, $\forall u,v\in S$, $c(u,v,\cdot)\in C_b(X)$ 且它有势 V. 则

$$\mathscr{R}(\bar{\Omega})=\mathscr{G}_c(V) \tag{7.2}$$

其中 $\bar{\Omega}$ 是由定理 1.2.11 定义的算子 Ω 的闭包。

注. 由定理的证明可以看出此处 $c(\cdot,\cdot)$, $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 除满足定理的假设外, 并不需要定理 1.2.7, 1.2.11 的其他假设. 也不需要相应随机过程的存在。

证. (i) 设 $\mu\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ 为自旋变相速度函数的相应算子, 则 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$, $\forall\zeta\in X(S\setminus\Lambda)$, $\forall u\in\Lambda$, 由 (1.8.3), (1.8.2), (1.7.2)知

$$\frac{f^\Lambda({}_u\xi\times\zeta)}{f^\Lambda(\xi\times\zeta)}=\frac{\exp V({}_u\xi\times\zeta)}{\exp V(\xi\times\zeta)}=\frac{c(u,\xi\times\zeta)}{c(u,{}_u\xi\times\zeta)}$$
$$=\frac{\mu({}_u\xi|\zeta)}{\mu(\xi|\zeta)},\zeta-a.e.(\mu_{S\setminus\Lambda})$$

因而 $\forall\xi\in X(\Lambda)$, 由(1.7.1)及比例性质

$$\frac{\mu(\xi|\zeta)}{f^\Lambda(\xi\times\zeta)}=\frac{\mu(\xi|\zeta)}{f^\Lambda(\xi\times\zeta)}$$
$$=\frac{\mu(X(\Lambda)\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))(w\times\zeta)}{\sum\limits_{\xi\in X(\Lambda)}f^\Lambda(\xi\times\zeta)}$$
$$=1,\zeta-a.e.(\mu_{S\setminus\Lambda})$$

此即(1.8.4),亦即 $\mu\in\mathscr{G}_s(V)$.

反之,若 $\mu\in\mathscr{G}_s(V)$, 则由(1.8.4)知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$,

$$\mu(\xi|\zeta)=f^\Lambda(\xi\times\zeta),\ \zeta-a.e.(\mu_{S\setminus\Lambda})$$

而由(1.8.3),(1.8.2)得

$$\frac{f^\Lambda({}_u\xi\times\zeta)}{f^\Lambda(\xi\times\zeta)}=\frac{c(u,\xi\times\zeta)}{d(u,{}_u\xi\times\zeta)},\ \Lambda\in\mathscr{S},\xi\in X(\Lambda),$$

$$\zeta\in X(S\setminus\Lambda),u\in\Lambda.$$

由上两式即得(1.7.2),因而 $u\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$.

(ii) 设 $\mu\in\mathscr{R}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ 为排它速度函数的相应算子,则对任何 $\Lambda\in\mathscr{S}$, $k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$, $\xi\in X_k(\Lambda)$, $\xi\in X(S\setminus\Lambda)$ 及 $u,v\in\Lambda$ $u\neq v$, 由(1.9.3),(1.9.2)知

$$(7.3)\qquad \frac{f_k^\Lambda({}_{(u,v)}\xi\times\zeta)}{f_k^\Lambda(\xi\times\zeta)}=\frac{\exp V({}_{(u,v)}\xi\times\zeta)}{\exp V(\xi\times\zeta)}$$

$$=\frac{c(u,v,\xi\times\zeta)}{c(u,v,{}_{(u,v)}\xi\times\zeta)}$$

再由(1.7.3)即得

$$\frac{\mu(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=\frac{\mu(\{{}_{(u,v)}\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda({}_{(u,v)}\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}\ \mu-a.e.$$

由于 $\forall\xi\in X_k(\Lambda)$, $\forall\zeta\in X(S\setminus\Lambda)$, 在场 Q_e 中 $\xi\times\zeta\sim\xi\times\zeta$,
故由上式,(2.5),比例性质及条件期望的平滑性知

$$\frac{\mu(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=\frac{\mu(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{f_k^\Lambda(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=\frac{\mu(X_k(\Lambda)\times X(S\setminus\Lambda)|\mathscr{A}(S\setminus\Lambda))}{\sum\limits_{\xi\in X_k(\Lambda)}f_k^\Lambda(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})}$$

$$=I_{X_k(\Lambda)}((\cdot)_\Lambda)\quad \mu-a.e.$$

于是 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$,

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\backslash\Lambda)) \\
&\quad = f^{\Lambda}_{\{\xi\}}(\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) I_{X_{\{\xi\}}(\Lambda)}((\cdot)_{\Lambda}) \\
&\quad = f^{\Lambda}_{\{(\cdot)_{\Lambda}\}}(\xi \times (\cdot)_{\phi\backslash\Lambda}) \quad \mu - a.e.
\end{aligned}
$$

即 $\mu \in \mathscr{G}_c(V)$.

反之,若 $\mu \in \mathscr{G}_c(V)$, 则由(1.9.4),(7.3)(注意(7.3)的成立只须 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$有势即可!)知 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$, $\forall \{u,v\} \subset \Lambda$ 有

$$
\begin{aligned}
&c(u,v,\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \mu(\{\xi\} \times X(S\backslash\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\backslash\Lambda)) \\
&\quad = c(u,v,\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) f^{\Lambda}_{\{(\cdot)_{\Lambda}\}}(\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \\
&\quad = c(u,v,{}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) f^{\Lambda}_{\{(\cdot)_{\Lambda}\}}({}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \\
&\quad = c(u,v,{}_{(u,v)}\xi \times (\cdot)_{S\backslash\Lambda}) \mu(\{{}_{(u,v)}\xi\} \\
&\qquad \times X(S\backslash\Lambda) \mid \mathscr{A}(S\backslash\Lambda)) \quad \mu - a.e.
\end{aligned}
$$

故由命题 1.7(ii) 知 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$. □

§4 可逆测度的存在与有势性

本节讨论正自旋变相速度函数与排它速度函数的可逆测度的存在问题。对于前者得到了较完整的结论,即可逆等价于有势.对于排它的情形,证明了可逆测度必存在;反之,若有正可逆测度存在,则它有势,从而正可逆测度等价于正的正则 Gibbs 态。

1. 定理 设正自旋变相速度函数 $c(\cdot,\cdot): S \times X \to (0,\infty)$ $\forall u \in S$, $c(u,\cdot) \in C_b(X)$, 则 $\mathscr{R}(\bar{\Omega}) \neq \phi$ 的充分与必要条件是 $c(\cdot,\cdot)$ 有势,其中 $\bar{\Omega}$ 为由定理 1.2.7 定义的算子 Ω 的闭包。

证. 充分性由定理 3.7(i) 及定理 3.4(i) 即得。 今往证必要性。

设 $\mathscr{R}(\bar{\Omega}) \neq \phi$,则有一$\mu \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$,从而 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$,$\exists \xi_0 \in X(\Lambda)$ 使

$$0<\mu(\{\xi_0\}\times X(S\backslash\Lambda))=\int_{X(S\backslash\Lambda)}\mu(\xi_0|\zeta)\mu_{S\backslash\Lambda}(d\zeta),$$

于是 $\mu_{S\backslash\Lambda}\{\zeta\in X(S\backslash\Lambda):\ \mu(\xi_0|\zeta)>0\}>0$. 故 $\exists\zeta^{(\Lambda)}\in X(S\backslash\Lambda)$ 使 $\mu(\xi_0|\zeta^{(\Lambda)})>0$ 且由命题 1.7(i) 知有

$$(1.1)\qquad \forall\xi\in X(\Lambda),\ \forall u\in\Lambda,\ \mu({}_u\xi|\zeta^{(\Lambda)})c(u,{}_u\xi\times\zeta^{(\Lambda)})$$
$$=\mu(\xi|\zeta^{(\Lambda)})c(u,\xi\times\zeta^{(\Lambda)}).$$

从而由 $c(w,\eta)>0$, $w\in S$, $\eta\in X$, 知

$$(1.2)\qquad \forall\xi\in X(\Lambda),\quad \mu(\xi|\zeta^{(\Lambda)})>0$$

成立. 由 (1.1),(1.2) 即知 $\forall u,v\in\Lambda$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$ 有

$$(1.3)\qquad c(u,\xi\times\zeta^{(\Lambda)})c(v,{}_u\xi\times\zeta^{(\Lambda)})c(u,{}_u({}_v\xi)$$
$$\times\zeta^{(\Lambda)})c(v,{}_v\xi\times\zeta^{(\Lambda)})$$
$$=c(v,\xi\times\zeta^{(\Lambda)})c(u,{}_v\xi\times\zeta^{(\Lambda)})c(v,{}_u({}_v\xi)$$
$$\times\zeta^{(\Lambda)})c(u,{}_u\xi\times\zeta^{(\Lambda)}).$$

但 $\{\xi\times\zeta^{(\Lambda)}:\xi\in X(\Lambda),\ \Lambda\in\mathscr{S}\}$ 在X中稠, $\forall\eta\in X$, 取 $\{\Lambda_m\}\subset\mathscr{S}$, $\Lambda_m\uparrow S$, 则 $\eta_{\Lambda_m}\times\zeta^{(\Lambda_m)}\to\eta$, 且 $\forall\{u,v\}\subset S$, $\exists m_0$ 使当 $m\geqslant m_0$ 时, $\Lambda_m\supset\{u,v\}$. 于是 (1.3)对 $\Lambda=\Lambda_m$, $\xi=\eta_{\Lambda_m}$ 成立. 再由 $c(u,\cdot)$, $c(v,\cdot)$ 的连续性知 (2.4.1) 成立, 由定理 2.4 知 $c(\cdot,\cdot)$ 有势. □

2. 定理 排它速度函数必可逆. 详言之, 以 ν_0, ν_1 分别表示在点 θ, $\mathbf{1}$($\theta_u\equiv0$, $\mathbf{1}_u\equiv0$) 处的点测度 (即 $\nu_0(\{\theta\})=\nu_1(\{\mathbf{1}\})=1$, $\nu_0(\{\theta\}^c)=\nu_1(\{\mathbf{1}\}^c)=0$), 则 ν_0, ν_1 是任何排它速度函数的可逆测度.

证. 设 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$: $S\times S\times X\to(0,\infty)$ 是一排它速度函数(不必具有正性), 则 $\forall f\in C_b(X)$, $\forall\{u,v\}\subset S$, $u\neq v$,

$$\int c(u,v,\eta)[f({}_{(u,v)}\eta)-f(\eta)]\nu_0(d\eta)$$
$$=c(u,v,\theta)[f({}_{(u,v)}\theta)-f(\theta)]=0.$$

故由命题 1.6(ii) 知 $\nu_0 \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$，类似地可证 $\nu_1 \in \mathscr{R}(\bar{\Omega})$. □

3. 注 由定理 2 知排它速度函数有可逆测度并不能推出有势，这说明自旋变相与排它不同. 原因之一在于：若 μ 是任一正自旋变相速度函数的可逆测度，则 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\forall \xi \in X(\Lambda)$ 有

$$\mu_\Lambda(\{\xi\}) = \mu(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda) > 0.$$

事实上，由定理 1 的证明已得 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\exists \xi_0 \in X(\Lambda)$ 使

$$\mu_{S\setminus\Lambda}\{\zeta : \mu(\xi_0|\zeta) > 0\} > 0,$$

再由 (1.7.2) 可得 $\forall \xi \in X(\Lambda)$，有 $\mu_{S\setminus\Lambda}\{\zeta : \mu(\xi|\zeta) > 0\} > 0$. 于是即得 $\mu_\Lambda\{\xi\} > 0$. 而对排它过程，总存在（如 ν_0）不具有上述性质的可逆测度. 为此我们引进

4. 定义 称 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 为正的，如果

(4.1) $\quad \forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\forall \xi \in X(\Lambda)$，$\mu_\Lambda(\{\xi\}) > 0$.

以 $\mathscr{P}_+(X)$ 表示一切正概率测度的集，类似地用 $\mathscr{R}_+(\bar{\Omega})$ 表示正可逆测度集.

由注 3 知对自旋变相过程来说，$\mathscr{R}_+(\bar{\Omega}) = \mathscr{R}(\bar{\Omega})$，而排它过程则不然.

5. 定理 设排它速度函数 $c(\cdot,\cdot,\cdot): S \times S \times X \to [0, \infty)$，$c(u,v,\eta) > 0$ 当且仅当 $\eta_u \neq \eta_v$，$\forall u, v \in S, c(u, v, \cdot) \in C_b(X)$. $\bar{\Omega}$ 为由定理 1.2.11 定义的算子 Ω 的闭包. 若 $\mathscr{R}_+(\bar{\Omega}) \neq \phi$，则 $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ 有势 V 且 $\mathscr{R}_+(\bar{\Omega}) = \mathscr{P}_+(X) \cap \mathscr{G}_c(V)$.

证. 由假设知 $\exists \mu \in \mathscr{R}_+(\bar{\Omega})$，即 (1.7.3) 成立且 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\forall k \in \{0, 1, \cdots, |\Lambda|\}$，$\forall \xi \in X_k(\Lambda)$ 有

$$\begin{aligned} 0 &< \mu(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)) \\ &= \int_{X_k(\Lambda)\times X(S\setminus\Lambda)} \mu(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda) | \mathscr{A}(S\setminus\Lambda)) d\mu, \end{aligned}$$

从而

$$\mu(\{\eta \in X_k(\Lambda) \times X(S\setminus\Lambda):$$

$$\mu(\{\xi\})\times X(S\backslash\Lambda))|\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\eta)>0\})>0.$$

于是 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$ $\exists\eta^{(\Lambda,k)}\in X$，$\exists\xi_0\in X_k(\Lambda)$ 使 $\mu(\{\xi_0\}\times X(S\backslash\Lambda)|\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\eta^{(\Lambda,k)})>0$，而由 (1.7.3) 知 $\forall\xi\in X_k(\Lambda)$，$\forall\{u,v\}\subset\Lambda$（记 $\zeta^{(\Lambda,k)}=(\eta^{(\Lambda,k)})_{S\backslash\Lambda}$）有

$$\begin{aligned}&c(u,v,\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)})\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)|\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\eta^{(\Lambda,k)})\\ &=c(u,v,{}_{(u,v)}\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)})\mu(\{{}_{(u,v)}\xi\}\\ &\qquad\times X(S\backslash\Lambda)|\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\eta^{(\Lambda,k)}).\end{aligned}\tag{5.1}$$

故由 $\eta_u\neq\eta_v\Rightarrow c(u,v,\eta)>0$ 知 $\forall\xi\in X_k(\Lambda)$ 有

$$\mu(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)|\mathscr{A}(S\backslash\Lambda))(\eta^{(\Lambda,k)})>0,\tag{5.2}$$

当 $\xi\in X_k(\Lambda)$，$u,v,w\in\Lambda$ 两两不同，且 $\xi(u)\neq\xi(v)$，$\xi(v)=\xi(w)$ 时，由 (5.1)，(5.2) 并注意到 ${}_{(v,w)}({}_{(u,v)}\xi)={}_{(u,w)}\xi$，可得

$$\begin{aligned}&c(u,v,\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)})c(v,w,{}_{(u,v)}\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)})c(w,u,{}_{(w,u)}\xi\\ &\times\zeta^{(\Lambda,k)})=c(u,w,\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)})c(w,v,{}_{(u,w)}\xi\\ &\times\zeta^{(\Lambda,k)})c(v,u,{}_{(v,u)}\xi\times\zeta^{(\Lambda,k)}).\end{aligned}\tag{5.3}$$

对于 $\xi\in X_k(\Lambda)$，$u,v,w\in\Lambda$ 的其它情形，容易验证 (5.3) 也成立。但

$$\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}}\bigcup_{k=0}^{|\Lambda|}X_k(\Lambda)\times\{\zeta^{(\Lambda,k)}\}$$

在 X 中稠，且 $c(u,v,\cdot)\in C_b(X)$，故仿定理 1 的证明可知(2.5.1)成立，从而定理 2.5 知 $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ 有势，再由定理 3.7(ii) 知

$$\mathscr{R}_+(\bar{\Omega})=\mathscr{P}_+(X)\cap\mathscr{R}(\bar{\Omega})=\mathscr{P}_+(X)\cap\mathscr{G}_c(V).\ \square$$

6. 注 定理 2 还可以一般化，即只要有一等价类 X_l 使 Ω_c（排它速度函数决定的场）限于其上有势，则可由这一块上的关于 Ω_c 的配称列出发构造可逆测度。 我们将有关结果留作习题（习题 11,12）。

§5 习题与补充

1. 如 §1.4 所设,试证:

(i) (1.4.1.4) 成立, 且 $\forall f\in B(X)$ (X 上有界 B_X 可测函数类),有

$$\int p(t,\cdot,d\eta)f(\eta)\in B(X);$$

(ii) 若 $\mu\in\mathscr{I}$, 则 $\forall f\in B(X)$ 有

$$\int_X\left(\int_X p(t,\cdot,d\eta)f(\eta)\right)\mu(d\eta)=\int f d\mu;$$

(iii) 若 $\mu\in\mathscr{I}$, P 为以 μ 为初始分布,过程 $\{\eta_t;P_\eta,\eta\in X\}$ 的分布,即

$$P(\cdot)\triangleq\int_X P_\eta(\cdot)\mu(d\eta),$$

则(1.1.6)成立。

提示: 令

$$f(\eta)=I_{A_0}(\eta)\int_{A_1}p(t_1-t_0,\eta,d\eta_1)$$

$$\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1},\eta_{n-1},d\eta_n),$$

则由 (ii), P 及 P_η 的定义得

$$\begin{aligned}P(\eta_{t_0+t}\in A_0,\eta_{t_1+t}\in A_1,\cdots,\eta_{t_n+t}\in A_n)\\=\int\mu(d\eta)\int p(t_0+t,\eta,d\eta_0)f(\eta_0)\\=\int\mu(d\eta)\int p(t_0,\eta,d\eta_0)f(\eta_0)\\=P(\eta_{t_0}\in A_0,\eta_{t_1}\in A_1,\cdots,\eta_{t_n}\in A_n).\end{aligned}$$

2. 证明(1.3.5)与(1.3.3)等价。

提示：$\forall f\in B(X)$ 定义

$$P(t)f \triangleq \int p(t,\ \cdot,\ d\eta)f(\eta),$$

则由(1.3.5)可写成

$$(1.3.5) \qquad \int fP(t)g\,d\mu = \int gP(t)f\,d\mu.$$

且记 $f_k = I_{A_k}$，从而(1.3.3)的左端可写成

$$\int [f_0P(t_1 - t_0)[f_1P(t_2 - t_1)[f_2P(t_3 - t_2)[\cdots[f_{n-1}P(t_n - t_{n-1})f_n]\cdots]]]]d\mu$$

反复应用(1.3.5′)(归纳法！)可证它等于

$$\int [f_nP(t_n - t_{n-1})[f_{n-1}P(t_{n-1} - t_{n-2})[\cdots[f_1P(t_1 - t_0)f_0]\cdots]]]d\mu$$

易见此即(1.3.3)的右端。

3. 试证(1.6.1) $\forall f\in C_b(X)$ 成立当且仅当下列的(3.1)、(3.2)有一成立。

(3.1) $\forall \Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall u\in\Lambda$，(1.6.1) 中的等式对 $f = f_\Lambda$ 成立。

(3.2) $\forall \Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall \xi\in X(\Lambda)$，(1.6.1)中的等式对 $f = I_{\{\eta_\Lambda=\xi\}}$ 成立。其中 f_Λ 的定义见命题 6 的证明。

4. 试证：(1.6.2) $\forall f\in C_b(X)$ 成立当且仅当

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \forall \Lambda\in\mathscr{S},\ \forall u\in\Lambda,\ \forall v\notin\Lambda, \\ \int c(u,\ v,\ \cdot)I_{\{\eta_\Lambda=1_\Lambda\}}d\mu \\ \qquad = \int c(u,\ v,\ \cdot)I_{\{\eta:\eta_\omega=1,\omega\in(\Lambda\cup\{u\})\cup\{v\}\}}d\mu. \end{cases}$$

5. 试证：

(i) 在命题 7.1(i) 的假设下，(1.7.2)等价于

$$(5.1) \qquad \forall u\in S,\ \forall \xi\in\{0,\ 1\},\ c(u,\ \xi\times\zeta)\mu(\xi|\zeta) = c(u,(1-\xi)\times\zeta)\mu(1-\xi|\zeta),\ \zeta - a.e.(\mu_{S\setminus\{u\}})$$

(ii) 在命题 7.2(ii) 的假设下，(1.7.3)等价于

$$\forall\{u,v\}\subset S,\ \forall\xi=\{\xi(u),\ \xi(v)\}\subset\{0,\ 1\}^{\{u,v\}},$$
$$\xi(u)+\xi(v)=1,$$
$$(5.2)\quad c(u,v,\xi\times(\cdot)_{S\setminus\{u,v\}})\mu(\{\xi\}\times X(\{u,v\}^c)|\mathscr{A}(\{u,v\}^c))$$
$$=c(u,v,{}_{(u,v)}\xi(\cdot)_{S\setminus\{u,v\}})\mu(\{{}_{(u,v)}\xi\}\times X(\{u,v\}^c)|\mathscr{A}(\{u,v\}^c))\quad a.e.\mu$$

6. (i) 如果函数 $V:X\to R$ 满足

$$(6.1)\qquad \forall u\in S,\qquad \Delta_u V(\cdot)=V({}_u(\cdot))-V\in C_b(X),$$

则称 V 为**自旋变相连续势**(自旋变相速度函数的势就是它)。V 为自旋变相连续势的充要条件是 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$ (3.1.1) 成立。

(ii) 如果函数 $V:X\to R$ 满足

$$(6.2)\qquad \forall u,v\in S,\quad \Delta_{(u,v)}V=V({}_{(u,v)}(\cdot))-V\in C_b(X),$$

则称 V 为**排它连续势**。若排它函数有势，则它的势是排它连续势。V 为排它连续势的充要条件的充分与必要条件是 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall k\in\{0,1,\cdots,|\Lambda|\}$，任意取定 $\xi(k,\ \Lambda)\in X_k(\Lambda)$，(3.1.2) 成立。

7. 设 $V:X\to R$ 为自旋变相连续势，则以 V 为势的正自旋变相速度函数的全体为

$$\{h(\cdot,\cdot)e^{-V}:h:S\times X\to R,\ h(u,\eta)=h(u,{}_u\eta);\ \forall u\in S,\ h(u,\cdot)e^{-V}\in C_b(X)\}$$

8. 设 $V:X\to R$ 为排它连续势，则以 V 为势的全体正排它速度函数作成的集为

$$\left\{h(\cdot,\cdot,\cdot)e^{-V}\ \middle|\ \begin{array}{l} h:S\times S\times X\to R,\ h(u,v,\eta)>0\Longleftrightarrow\eta(u)\neq\eta(v);\\ h(u,v,\eta)=h(u,v,{}_{(u,v)}\eta);h(u,v,\cdot)e^{-V}\in C_b(X),\\ u,\ v\in S\end{array}\right\}$$

9. 设 $c(\cdot,\cdot):S\times X\to R$ 是任一正自旋变相速度函数，且有

势 V. $\forall A\in\mathscr{S}$ 定义

$$(9.1)\qquad J(A)\triangleq\sum_{B\subset A}(-1)^{|A-B|}(V(\eta_B\times\theta_{S\setminus B})-V(\theta)),$$

其中 η 满足

$$(9.2)\qquad \Lambda_\eta\triangleq\{u\in S:\eta_u=1\}\supset A.$$

则下列诸结论成立:

(i) $J(A)$ 的定义是合理的,即 $J(A)$ 的定义与 η 的选择无关。

(ii) 若 $\Lambda_\eta\in\mathscr{S}$, 则

$$(9.3)\qquad V(\eta)-V(\theta)\sum_{A\subset\Lambda_\eta}J(A).$$

(iii) 若 $\forall u\in S$, $\sum_{A\ni u}|J(A)|<\infty$, 则 $\forall\eta\in X$ 有

$$(9.4)\qquad f^\wedge(\eta)=\exp\Big\{\sum_{A\cap\Lambda\neq\phi}J(A)\prod_{v\in A}\eta_v\Big\}\Big/\sum_{w\in X(\Lambda)}$$
$$\cdot\exp\Big\{\sum_{A\cap\Lambda=\phi}J(A)\prod_{v\in A}(w\times\eta_{S\setminus\Lambda})_v\Big\}$$

提示: 为证 (i),只须证(9.1)的右端对 $\eta=\mathbf{1}_A\times\theta_{S\setminus A}$ 及任一满足(9.2)的 η 的值相等. (ii) 的证明应用公式

$$(9.5)\qquad \sum_{A\subset\Lambda}(-1)^{|A|}=\begin{cases}0, & |\Lambda|>0,\\ 1, & \Lambda=\phi,\end{cases}\quad \Lambda\in\mathscr{S}$$

并注意 $\eta=\mathbf{1}_{\Lambda_\eta}\times\theta_{S\setminus\Lambda_\eta}$. 至于 (iii), 先仿照证明(3.5.1)的方法往证(9.4)对满足(9.2)的 η 成立, 再应用(9.4)的两边都是 η 的连续函数即可证明(9.4) $\forall\eta\in X$ 成立。

注. (9.1) 所定义的 $J(A)$ 即 C. 蒲瑞斯顿《随机场》§ 5 的伊辛模型的交互作用势 Φ(见该书中译本第 68 页)。

10. 设 $\Phi:\mathscr{S}\setminus\{\phi\}\to R$ 为伊辛模型的交互作用势, 且满足(2.6.1), $V:X\to R$ 为相应的势(具参数 β), 定义

$$(10.1)\qquad J(A)\triangleq\begin{cases}0, & A=\phi,\\ 2^{|A|}\sum\limits_{\Lambda\subset S\setminus A}(-1)^{|\Lambda|}\Phi(A\cup\Lambda), & A\in\mathscr{S},\ A\neq\phi.\end{cases}$$

上面和式中的 $\Lambda\in\mathscr{S}$. 试证:

$$(10.2)\qquad \Phi(A)=\sum_{B\supset A}J(B)/2^{|B|},\ A\in\mathscr{S},\ A\neq\phi;$$

$$(10.3)\qquad V(\eta)-V(\theta)=\beta\sum_{A\subset\Lambda_\eta}J(A),\ \Lambda_\eta\in\mathscr{S}.$$

注. (10.1)—(10.3) 说明了本书与 C. 蒲瑞斯顿《随机场》中的伊辛模型的一致性. 当 $\Phi(\{u\})=0$, $u\in S$ 时称为无外场, 用 $J(A)$ 表示无外场就是 $J(A)$ 满足

$$(10.4)\qquad \sum_{A\ni u}J(A)/2^{|A|}=0,\quad \forall u\in S.$$

特别若 $S=Z^d$, Φ 为平移平变的对势, 即当 $|A|\geqslant 3$ 时 $\Phi(A)=0$, $\Phi(\{v,\ v+u\})=\Phi(\{0,\ u\})$, $\Phi(\{v\})=\Phi(\{0\})$ $v\in Z^d$, $0\neq u\in Z^d$. 则 $J(A)=0$, 当 $|A|\geqslant 3$; 且 $J(A)$ 平移不变,而无外场则表述为

$$(10.5)\qquad 2J(\{0\})+\sum_{0\neq u\in Z^d}J(\{0,\ u\})=0.$$

提示. 应用(9.5)可证明(10.2). 为证(10.3),令

$$V_1(\eta)\triangleq\beta\sum_{A\subset\Lambda_\eta}J(A),\ \Lambda_\eta\in\mathscr{S},$$

往证

$$\Delta_u V_1(\eta)=-2\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)=\Delta_u V(\eta).$$

11. 采用 §2 的记号, 设 Q_c 是由一排它速度函数决定的场, Q_c 限于 X_l 可配称 (即 Q_c 弱可配称且配称函数 $u(\eta)$, $\eta\in X$, 可和),且

$$K_l \triangleq \sum_{\eta \in X_l} \frac{\hat{q}(\Delta_l, \eta)}{\hat{q}(\eta, \Delta_l)} < \infty.$$

$\forall A \in \mathscr{F}$，定义

$$\mu(A) \triangleq K_l^{-1} \sum_{A \cap X_l} \frac{\hat{q}(\Delta_l, \eta)}{\hat{q}(\eta, \Delta_l)},$$

则 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{Q})$. 反之，若 $\mu \in \mathscr{R}(\bar{Q})$，且 $\mu(X_l) > 0$，则 Q_c 限于 X_l 可配称。

12. (i) 设 Q_c 限于 X_l 有势，则 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，

(12.1) $\quad \{q(\xi \times (\Delta_l)_{S \setminus \Lambda}, \tilde{\xi} \times (\Delta_l)_{S \setminus \Lambda}) : \xi, \tilde{\xi} \in X_l(\Lambda)\}$

$X_l(\Lambda) \triangleq \left\{\xi \in X(\Lambda),\ \sum_{u \in \Lambda} \xi_u = \sum_{u \in \Lambda} (\Delta_l)_u\right\}$，可配称。

(ii) 设(12.1)的配称分布为 $\pi_{l,\Lambda}(\xi)$，$\xi \in X_l(\Lambda)$，记

$$\mu_{l,\Lambda}(F) \triangleq \sum_{\xi \in F((\Delta_l)_{S \setminus \Lambda}) \cap X_l(\Lambda)} \pi_{l,\Lambda}(\xi),$$

其中 $F \in \mathscr{F}$，$F((\Delta_l)_{S \setminus \Lambda})$ 为 F 在 $(\Delta_l)_{S \setminus \Lambda}$ 处的截口. 若 $\mu_l \in \mathscr{P}(X)$ 且 $\exists \{\Lambda_n\} \subset \mathscr{S}$，$\Lambda_n \uparrow S$ 使 $\mu_{l,\Lambda_n} \Rightarrow \mu_l$，则 $\mu_l \in \mathscr{R}(\bar{Q})$ 且 $\mu_l(\bar{X}_l) = 1$，$\bar{X}_l$ 表 X_l 的闭包。

(iii) 若 Q_c 限于 X_l 有势但不可配称，则 (ii) 定义的 μ_l 且有性质 (a) $\mu_l(X_l) = 0$，(b) $\mu_l(\bar{X}_l \setminus X_l) = 1$。

13. 设 S 为可数集，

$$X \triangleq \prod_{u \in S},\quad 2 \leqslant |Y_u| < \infty.$$

$\forall u \in S$，Y_u 赋散拓扑，X 赋乘积拓扑，称 X 上的函数族 $\mathscr{V} \triangleq \{f^\Lambda : \Lambda \in \mathscr{S}\}$ 为一规范，如果它满足

(13.1) $\quad \forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$0 \leqslant f^\Lambda(\eta)$，$f^\Lambda \in C_b(X)$；

(13.2) $\quad \forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\eta \in X$ $\displaystyle\sum_{\omega \in X(\Lambda)} f^\Lambda(\omega \times \eta_{S \setminus \Lambda}) = 1$，

(13.3) $\quad \forall \Lambda \subset \tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}$，$\forall \eta \in X$，

$$f^{\tilde{\Lambda}}(\eta) = f^{\Lambda}(\eta) \sum_{\omega \in X(\Lambda)} f^{\tilde{\Lambda}}(\omega \times \eta_{S \setminus \Lambda}).$$

称 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 为规范 $\mathscr{Y}$ 的一个 Gibbs 态，如果

(13.4) $\quad \forall\Lambda\in\mathscr{S},\ \forall\xi\in X(\Lambda),\ \mu(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)\mid\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))$
$$=f^{\Lambda}(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})\quad \mu\text{—}a.e.$$

$\mathscr{Y}$ 的一切 Gibbs 态作成的集记作 $\mathscr{G}(\mathscr{Y})$. 令

(13.5) $\quad \mathscr{G}_D(\mathscr{Y})\triangleq\{\mu\in\mathscr{P}(X):\forall\Lambda\in\mathscr{S},\ \forall\xi\in X(S\setminus\Lambda),$
$$\mu(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda))=\int f^{\Lambda}(\xi\times(\cdot)_{S\setminus\Lambda})d\mu\Big\}.$$

$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，令 $\mathscr{G}_\Lambda$ 为概率测度集
$$\Big\{\mu_{\Lambda,\zeta}\in\mathscr{P}(X):\Lambda\in\mathscr{S},\ \zeta\in X(S\setminus\Lambda),$$
$$\mu_{\Lambda,\zeta}(F)\triangleq\sum_{\xi\in F(\zeta)}f^{\Lambda}(\xi\times\zeta),\quad F\in\mathscr{F}\Big\}$$

其中 $F(\zeta)=\{\xi\in X(\Lambda):\xi\times\zeta\in F\}$，的弱凸闭包，

(13.6) $\quad \mathscr{G}_L(\mathscr{Y})\triangleq\{\mu\in\mathscr{P}(X):\exists\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S},\ \Lambda_n\uparrow S,\ \exists\mu_n\in\mathscr{G}_{\Lambda_n}$
使 $\mu_n\Rightarrow\mu\}$.

试仿照定理 3.4(i) 证法往证

(13.7) $\quad \mathscr{G}(\mathscr{Y})=\mathscr{G}_D(\mathscr{Y})=\mathscr{G}_L(\mathscr{Y})\neq\phi.$

第三章　耦合及其应用

耦合技巧在无穷粒子马氏过程的研究中是一个很重要的工具。本章将首先(§1)介绍两个构造耦合并加以应用的简单例子，以期更好地阐明耦合的构造方法及应用的想法。§2介绍两个自旋变相过程的基本耦合及存在性证明，以及对过程保序性的应用。§3给出了吸引的自旋变相过程遍历的两种条件；并将它们应用于接触过程等例子；还讨论了平移不变的情形。§4应用§3的结果讨论有势且吸引的自旋变相过程遍历与 Gibbs 态唯一的关系，进而讨论伊辛模型的相变问题。§5介绍了一种将一般自旋变相模型转化成吸引模型的方法。

§1　引言及简单例子

在无穷粒子系统的研究中，耦合技巧是一个很重要的工具，它在概率论的其它领域(如马尔可夫链、随机序关系等)也有应用。但对初学者来说，无穷粒子系统的耦合似乎不易理解。为此在介绍无穷粒子系统的耦合之前，先介绍几个构造耦合并加以应用的更简单的例子。其目的主要是帮助理解构造耦合的想法及耦合的应用。

简单说来，耦合就是要在同一概率空间上，构造出两个或更多个具有给定特性的随机过程(或分布)。读者很自然地会想到：如果这些具给定特性的过程已经单独构造出来，那么通过构造乘积

概率空间的办法使这些过程是同一乘积概率空间上的过程。这就完成了一种耦合。这种耦合虽然有它的用处（下面的第一个例子便是这一方面的），但是在这种耦合下，这些过程是相互独立的，它们之间的联系毕竟相当少。通常有重要作用的耦合是使那些被耦合的过程有这样或那样的非平凡联系。例如被耦合的过程尽量“接近”，下面的第二个例子便是属于这一方面的。

1. 设 η 是实随机变量，f, g 是实直线上的两个有界不降函数(因而 Borel 可测)，从相关函数的含意来看，$f(\eta), g(\eta)$ 的相关矩应该是非负的，（即所谓正相关）。但是仅用 η 来考虑如何证明它，就不知如何进行。然而如果考虑两个独立同分布的随机变量 η, ζ，则证明就变得十分简单。因为此时由 f, g 的单调性知不论 η, ζ 取什么值，

$$[f(\eta)-f(\zeta)][g(\eta)-g(\zeta)]$$

是非负随机变量，于是由 η, ζ 的独立同分布知

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant E[f(\eta)-f(\zeta)][g(\eta)-g(\zeta)] \\
&= E[f(\eta)g(\eta)]+E[f(\zeta)g(\zeta)]-Ef(\eta)Eg(\zeta) \\
&\quad -Ef(\zeta)Eg(\eta) \\
&= 2[E[f(\eta)g(\eta)]-Ef(\eta)Eg(\eta)] \\
&= 2\mathrm{cov}(f(\eta),g(\eta)).
\end{aligned}$$

于是问题就得到证明。此证明就是利用了将两个同分布的随机变量用乘积测度的方法耦合在同一概率空间上。

将以上推广到 η 为取值于某一偏序空间(不是实直线)的随机变量的情形，就得到著名的 FKG 不等式，它的证明也是借助于耦合完成的(见本章习题)。

2. 应用耦合的另一例子是有限状态马链的遍历定理。设 $p(u,v)$ 是有限集 S 上离散参数马链的转移概率，$p^{(k)}(u,v), k\geqslant 1, u, v\in S$，是它的 k 步转移概率，即 $p^{(1)}(u,v)\triangleq p(u,v)$，

$$(2.1)\qquad p^{(k+1)}(u,v) \triangleq \sum_{w\in S} p^{(k)}(u,w)p(w,v)$$

则有下列的

3. 定理 设 $\exists m \geqslant 1$ 使

$$(3.1)\qquad \varepsilon \triangleq \min_{u,v\in S} p^{(m)}(u,v) > 0.$$

则 $\forall u,v \in S$,

$$(3.2)\qquad \pi(v) = \lim_{k\to\infty} p^{(k)}(u,v)$$

存在,而且 $\pi(v)$ 与 u 无关,且满足

$$(3.3)\qquad \sum_{u\in S}\pi(u)p(u,v) = \pi(v), \qquad \sum_{u\in S}\pi(u) = 1.$$

即马链 $(p(u,v);\ u,\ v\in S)$ 遍历,而 $\pi \triangleq (\pi(u): u\in S)$ 是它唯一的平稳分布。

此定理有各种证明,下面用耦合技巧来证明。

证. 设 (X_n, Y_n), $n = 0, 1, \cdots$ 是 $S\times S$ 上的马链,它按下列方式演化: (a) 直到首次 $X_n = Y_n$ 之前, X_n、Y_n 独立地按转移概率 $p(u,v)$ 运行; (b) 在首次 $X_n = Y_n$ 之后, X_k, Y_k 再不分开,按同一转移概率 $p(u,v)$ 一道运行。等价地说,(X_n, Y_n) 的转移概率是

$$(3.4)\qquad p((u,v),(x,y)) \triangleq P^{(u,v)}(X_1 = x, Y_1 = y)$$

$$\triangleq \begin{cases} p(u,x)p(v,y), & u \neq v, \\ p(u,x), \ u = v, & x = y, \\ 0, \qquad\ \ u = v, & x \neq y, \end{cases}$$

马链 (X_n, Y_n) 具有下列两个重要性质:

(i) X_n, Y_n 分别是以 $p(u,v)$ 为转移概率的马链,即 (X_n, Y_n) 是以 $p(u,v)$ 为转移概率的两个马链的耦合。

(ii) $\forall (u,v)\in S\times S$,

$$(3.5)\qquad \lim_{n\to\infty} P^{(u,v)}(X_n = Y_n) = 1.$$

证 由(3.4)容易算出：$\forall u,v,x,y\in S$ 有

$$\sum_y P^{(u,v)}(X_1=x,\ Y_1=y)=p(u,\ x),$$

$$\sum_x P^{(u,v)}(X_1=x,\ Y_1=y)=p(v,\ y),$$

因此 (i) 成立。为证 (ii)，令

$$\tau\triangleq\inf\ \{k\geqslant 1:X_k=Y_k\},$$

即 $(X_k,\ Y_k)$ 的分量首次相同的时刻，则由(3.4)知当 $x_0\neq y_0$，$(x_0,y_0)\in S$ 时

$$\begin{aligned}
P^{(x_0,y_0)}(\tau\leqslant m) &= \sum_{k=1}^{m}P^{(x_0,y_0)}(\tau=k)\\
&=\sum_{k=1}^{m}P^{(x_0,y_0)}(X_1\neq Y_1,\cdots,X_{k-1}\neq Y_{k-1},\ X_k=Y_k)\\
&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{x_1\neq y_1}\cdots\sum_{x_{k-1}\neq y_{k-1}}\sum_{x_k=y_k}\\
&\qquad\prod_{j=0}^{k-1}p((x_j,\ y_j),\ (x_{j+1},\ y_{j+1}))\\
&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{x_1\neq y_1}\cdots\sum_{x_{k-1}\neq y_{k-1}}\sum_{x_k=y_k}\\
&\qquad\prod_{j=0}^{k-1}p(x_j,\ x_{j+1})p(y_j,y_{j+1})\sum_{x_{k+1},y_{k+1}}\\
&\qquad\cdots\sum_{x_m,y_m}\prod_{j=k}^{m-1}p(x_j,\ x_{j+1})p(y_j,\ y_{j+1})\\
&\geqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{x_1\neq y_1}\cdots\sum_{x_{k-1}\neq y_{k-1}}\sum_{x_k=y_k}\\
&\qquad\sum_{x_{k+1},y_{k+1}}\cdots\sum_{x_{m-1},y_{m-1}}\sum_{x_m=y_m}
\end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{m-1} p(x_i, x_{i+1}) p(y_i, y_{i+1})$$

$$= \sum_{x_m = y_m} \sum_{x_1, y_1} \cdots \sum_{x_{m-1}, y_{m-1}}$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{m-1} p(x_i, x_{i+1}) p(y_i, y_{i+1})$$

$$= \sum_{z} p^{(m)}(x_0, z) p^{(m)}(y_0, z)$$

$$\geqslant \varepsilon \sum_{z} p^{(m)}(y_0, z) = \varepsilon.$$

当 $x_0 = y_0$ 时，$P^{(x_0, y_0)}(\tau \leqslant m) = 1 \geqslant \varepsilon$ 故得

(3.6) $\quad \forall x, y \in S,\ P^{(x,y)}(\tau \leqslant m) \geqslant \varepsilon,\ P^{(x,y)}(\tau > m) \leqslant 1 - \varepsilon.$

由 (*b*) 知当 $X_n \neq Y_n$ 时，则 $\forall l < n$ 都有 $X_l \neq Y_l$. 于是由马氏性，τ 的定义及(3.6)知 $\forall k > 1,\ x, y \in S,$

$$P^{(x,y)}(\tau > km) = P^{(x,y)}(X_{km} \neq Y_{km})$$

$$= \sum_{u \neq v} P^{(x,y)}(X_{(k-1)m} = u,\ Y_{(k-1)m} = v) P^{(u,v)}(\tau > m)$$

$$\leqslant (1 - \varepsilon) P^{(x,y)}(\tau > (k-1)m) \leqslant \cdots \leqslant (1 - \varepsilon)^k.$$

从而

$$P^{(x,y)}(X_n \neq Y_n) = P^{(x,y)}(\tau > n) \leqslant (1 - \varepsilon)^{\left[\frac{n}{m}\right]} \to 0,$$
$$(n \to \infty).$$

此即(3.5)，由性质 (i)

$$|p^{(n)}(x, v) - p^{(n)}(y, v)| = |P^{(x,y)}(X_n = v) - P^{(x,y)}(Y_n = v)|$$

(3.7)
$$= |P^{(x,y)}(X_n = v,\ Y_n \neq v) - P^{(x,y)}(X_n \neq v,\ Y_n = v)|$$

$$\leqslant P^{(x,y)}(X_n \neq Y_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

由于

$$p^{(n+1)}(x, v) = \sum_u p(x, u)p^{(n)}(u, v) \leqslant \max_u p^{(n)}(u,v),$$

$\max_x p^{(n)}(x,v)\searrow$，$\min_x p^{(n)}(x, v)\uparrow(n\uparrow)$. 再由 (3.7) 及 S 有限知

$$\max_x p^{(n)}(x,v) - \min_x p^{(n)}(x,v) \to 0 \ (n \to \infty),$$

因而 $\forall u \in S$

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(u, v) = \lim_{n\to\infty} \max_x p^{(n)}(x,v) = \lim_{n\to\infty} \min_x p^{(n)}(x, v)$$

故(3.2)获证. (3.3)由(2.1)并令 $k \to \infty$ 即得. □

§2 自旋变相过程的基本耦合

本节首先说明两个自旋变相过程的基本耦合算子的定义方法，然后再证明它们的基本耦合存在，导出它的一些推论.

1. 设$c_i(u, \eta)$，$u\in S$，$\eta\in X = \{0,1\}^S$，$i = 1, 2$ 是两个自旋变相速度函数，$c_i(u, \cdot)$，$u\in S$，是一致有界连续函数且变差一致可和（即满足定理 1.2.7 的条件）. 于是与之相应的自旋变相过程及马氏半群 $(\{\eta_{it}: t \geqslant 0\}, \{P_\eta^{(i)}: \eta\in X\})$，$\{S_i(t): t\geqslant 0\}$ 存在. 现在要构造它们的一个耦合，使它们的运行尽可能一致，通常称这样的耦合为基本耦合. 参考§1的第二个例子自然想到：基本耦合算子的构造可以这样直观描述. 若在时刻 $t\geqslant 0$，过程在 $x\in S$ 处的坐标 $\eta_{1t}(x) \neq \eta_{2t}(x)$，则它们在 x 处的坐标改变独立地按原定速率进行；若 $\eta_{1t}(x) = \eta_{2t}(x)$，则它们在 x 处的坐标改变应尽可能一致，于是同时改变 x 处的坐标的速率应该是

$$c_1(u, \eta_1)\wedge c_2(u, \eta_2).$$

而单独改变 x 处的坐标的速率是余下的速率，即

$$c_i(u, \eta_i) - c_1(u, \eta_1)\wedge c_2(u, \eta_2).$$

这样，它们的耦合算子 $\tilde{\Omega}$ 就应该是 $C_b(X\times X)$ 上如下定义

的算子：

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\Omega}f)(\eta_1,\eta_2) = & \sum_{u:\eta_1(u)\neq\eta_2(u)} c_1(u,\eta_1)[f({}_u\eta_1,\eta_2) \\
& - f(\eta_1,\eta_2)] \\
& + \sum_{u:\eta_1(u)\neq\eta_2(u)} c_2(u,\eta_2)[f(\eta_1,{}_u\eta_2) - f(\eta_1,\eta_2)] \\
& + \sum_{u:\eta_1(u)=\eta_2(u)} [c_1(u,\eta_1)\wedge c_2(u,\eta_2)][f({}_u\eta_1,{}_u\eta_2) \\
& - f(\eta_1,\eta_2)] \\
& + \sum_{u:\eta_1(u)=\eta_2(u)} [c_1(u,\eta_1)-c_2(u,\eta_2)]^+[f({}_u\eta_1,\eta_2) \\
& - f(\eta_1,\eta_2)] \\
& + \sum_{u:\eta_1(u)=\eta_2(u)} [c_2(u,\eta_2)-c_1(u,\eta_1)]^+[f(\eta_1,{}_u\eta_2) \\
& - f(\eta_1,\eta_2)].
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

(1.2) $\mathscr{D}(\tilde{\Omega})\triangleq\{f\in C_b(X\times X):\ |||f|||<\infty\}=\mathscr{D}(X\times X)$

其中[ ]$^+$表示正部，$|||f|||$ 按(1.1.2.8)定义，不过此时 $X\times X$ 理解成 $(\{0,1\}^2)^S$，即

$$|||f|||\triangleq\sum_{u\in S}\Delta_f(u),$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_f(u)=\sup\{\|f(\zeta_1\times\eta_1(S\backslash u),\ \zeta_2\times\eta_2(S\backslash u)) \\
-f(\eta_1,\eta_2)\|:u\in S,\ \zeta_1,\zeta_2\in\{0,1\},\ \eta_1,\eta_2\in X\}
\end{aligned}
$$

设 Ω_i 是由 $c_i(u,\eta)$，$u\in S$，$\eta\in X$，按(1.2.7.4)定义的算子，则 $\Omega_i, i=1,2$，是 $\tilde{\Omega}$ 的"边缘"算子，即

2. 引理 设 $g\in\mathscr{D}(X)$，若对给定 $i\in\{1,2\}$，$f(\eta_1,\eta_2)=g(\eta_i)$，则

(2.1) $$\tilde{\Omega}f(\eta_1,\eta_2)=\Omega_i g(\eta_i).$$

证. 若 $i=1$，则显然 $f\in\mathscr{D}(X\times X)$，(1.1) 右边的第二、五两项等于 0，$f({}_u\eta_1,\eta_2)-f(\eta_1,\eta_2)=f({}_u\eta_1,{}_u\eta_2)-f(\eta_1,\eta_2)=$

$g({}_u\eta_1)-g(\eta_1)$

$$(\tilde{Q}f)(\eta_1,\eta_2)=\sum_{u:\eta_1(u)\neq\eta_2(u)} c_1(u,\ \eta_1)[g({}_u\eta_1)-g(\eta_1)]$$

$$+\sum_{u:\eta_1(u)=\eta_2(u)}\{[c_1(u,\ \eta_1)-c_2(u,\ \eta_2)]^+$$

$$+c_1(u,\ \eta_1)\wedge c_2(u,\ \eta_2)\}[g({}_u\eta_1)-g(\eta_1)]$$

$$=\sum_{u\in S} c_1(u,\ \eta_1)[g({}_u\eta_1)-g(\eta_1)]=(\Omega_1 g)(\eta_1).$$

故 $i=1$的情形获证. 同法可证 $i=2$的情形. □

现在来证明 $\{S_i(t):t\geqslant 0\}$, $i=1,2$, 的耦合存在. 即

3. 定理 在第1目的假设下并采用该处的记号,则

(i) 存在一个唯一的 Feller 马氏半群 $\{\tilde{S}(t):t\geqslant 0\}$ 以 $\tilde{\Omega}$ 的闭包 $\bar{\tilde{\Omega}}$ 为无穷小母元.

(ii) 给定 $i\in\{1,\ 2\}$, 若 $f(\eta_1,\ \eta_2)=g(\eta_i)$, $g\in C_b(X)$, 则

$$\tilde{S}(t)f(\eta_1,\ \eta_2)=S_i(t)g(\eta_i). \tag{3.1}$$

证. 将 $X\times X$ 理解为 $(\{0,\ 1\}^2)^S$, 应用定理 1.2.5 来证明 (i). 定义:

$$\left\{\begin{array}{l} c(\Lambda,\eta,\cdot)=0,\quad 当\ |\Lambda|\geqslant 2,\ \eta=(\eta_1,\ \eta_2)\in X\times X;\\ c(\{u\},\ (\eta_1,\ \eta_2),\ \{\zeta\})\\ =\begin{cases} c_2(u,\eta_2), & \eta_1(u)\neq\eta_2(u),\zeta=(\eta_1(u),\ 1-\eta_2(u)),\\ c_1(u,\eta_1), & \eta_1(u)\neq\eta_2(u),\zeta=(1-\eta_1(u),\eta_2(u)),\\ c_1(u,\eta_1)\wedge c_2(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u),\zeta=(1-\eta_1(u),1-\eta_2(u)),\\ [c_1(u,\eta_1)-c_2(u,\eta_2)]^+, & \eta_1(u)=\eta_2(u),\zeta=(1-\eta_1(u),\eta_2(u)),\\ [c_2(u,\eta_2)-c_1(u,\eta_1)]^+, & \eta_1(u)=\eta_2(u),\zeta=(\eta_1(u),1-\eta_2(u)),\\ 0 & 其它 \end{cases}\\ \qquad \eta_1,\ \eta_2\in X,\quad \zeta\in\{0,\ 1\}^2. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

则 $\tilde{\Omega}$ 即为按 (1.2.2.6)及$\mathscr{D}(\tilde{\Omega})\triangleq\mathscr{D}(X\times X)$ 定义的算子. 因此

要证 $\{\tilde{S}(t): t\geqslant 0\}$ 存在唯一，只需就 $\tilde{\Omega}$ 验证条件 (1.2.3.1) 及 (1.2.5.1)满足。为此先对(3.2)定义的 $c(A,(\eta_1,\eta_2),\cdot)$ 估计 c_A 及 $c_A(v)$。

由(3.2)易见：当 $|A|\geqslant 2$ 时，$c_A=0$；当 $A=\{u\}$ 时，

$$c_{\{u\}}=\sup_{\eta_1,\eta_2\in X} c(\{u\},(\eta_1,\eta_2),\{0,1\}^2)\leqslant \sup\{c_1(u,\eta_1)+c_2(u,\eta_2):\eta_1,\eta_2\in X\} \tag{3.3}$$

还有当 $|A|\geqslant 2$ 时，$\forall u\in S$，$c_A(u)=0$。至于估计 $c_{\{u\}}(v)$，$v\neq u$，先应用(3.2)及下列的初等不等式

$$|a_1\wedge b_1-a_2\wedge b_1|\leqslant|a_1-a_2|,$$

$$|a_1\wedge b_1-a_2\wedge b_2|\leqslant|a_1-a_2|+|b_1-b_2|,$$

$$|[a_1-b_1]^+-[a_2-b_1]^+|\leqslant|a_1-a_2|,$$

$$|[a_1-b_1]^+-[a_2-b_2]^+|\leqslant|a_1-a_2|+|b_1-b_2|$$

估计

$$\sum_{\zeta\in\{0,1\}^2}|c(\{u\},\xi\times\eta(S\backslash v),\{\zeta\})-c(\{u\},\eta,\{\zeta\})|$$

$$\leqslant 3[|c_1(u,{}_v\eta_1)-c_1(u,\eta_1)|+|c_2(u,{}_v\eta_2)-c_2(u,\eta_2)|],$$

其中 $\eta=(\eta_1,\eta_2)=\{\eta(u): u\in S\}\in X\times X=(\{0,1\}^2)^S$，$\xi\in\{0,1\}^2, v\neq u$。于是当 $v\neq u$ 时，由(1.2.4.1)知

$$c_{\{u\}}(v)=\sup\Big\{\sum_{\zeta\in\{0,1\}^2}|c(\{u\},\xi\times\eta(S\backslash v),\{\zeta\})-c(\{u\},\eta,\{\zeta\})|:\xi\in\{0,1\}^2,\eta\in(\{0,1\}^2)^S\Big\} \tag{3.4}$$

$$\leqslant 3\sup\{|c_1(u,{}_v\eta_1)-c_1(u,\eta_1)|+|c_2(u,{}_v\eta_2)-c_2(u,\eta_2)|:\eta=(\eta_1,\eta_2)\in X\times X\}$$

$$\leqslant 3[\Delta_{c_1(u,\cdot)}(v)+\Delta_{c_2(u,\cdot)}(v)].$$

于是由第 1 目对 $c_i(u,\eta)$ 的假设及(3.3)、(3.4)立刻知道 $\tilde{\Omega}$ 满足条件(1.2.3.1)及(1.2.5.1)。故由定理 1.2.5 (i) 知 (i) 获证。

再来证明 (ii)：给定 $i\in\{1,2\}$，设 $f(\eta_1,\eta_2)=g(\eta_i)$，$g\in C_b(X)$。则当 $\lambda>0$ 充分小 $\exists h\in\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i)$ 使 $h=(I-\lambda\bar{\Omega}_i)^{-1}g$（关于 Ω_i 的假设及定理 1.2.7 令 $\tilde{h}(\eta_1,\eta_2)\triangleq h(\eta_i)$，则易见 $\tilde{h}\in\mathscr{D}(\bar{\tilde{\Omega}})$ 且 $\bar{\tilde{\Omega}}\tilde{h}(\eta_1,\eta_2)=\bar{\Omega}_i h(\eta_i)$（引理 2），于是 $\forall\eta_1,\eta_2\in X$，

$$f(\eta_1,\eta_2)=g(\eta_i)=(I-\lambda\bar{\Omega}_i)h(\eta_i)=(I-\lambda\bar{\tilde{\Omega}})\tilde{h}(\eta_1,\eta_2),$$

$$(3.5)\qquad (I-\lambda\bar{\tilde{\Omega}})^{-1}f(\eta_1,\eta_2)=\tilde{h}(\eta_1,\eta_2)=h(\eta_i)=(I-\lambda\bar{\Omega}_i)^{-1}g(\eta_i)$$

$\forall t>0$，令 $\lambda=\frac{t}{n}$，则当 n 充分大时，λ 充分小以致使 (3.5) 成立。应用(3.5) n 次即得

$$(3.6)\qquad \left(I-\frac{t}{n}\bar{\tilde{\Omega}}\right)^{-n}f(\eta_1,\eta_2)=\left(I-\frac{t}{n}\bar{\Omega}_i\right)^{-n}g(\eta_i)$$

由于(3.6)对一切充分大的 n 成立，令 $n\to\infty$ 由 (1.1.1.4) 即得 (3.1)。□

4. 下面考虑这样的问题：在 $X=\{0,1\}^S$ 中可以定义偏序关系：

$$(4.1)\qquad \eta_1\leqslant\eta_2\Longleftrightarrow\forall u\in S,\ \eta_1(u)\leqslant\eta_2(u).$$

设 $\{\eta_{it},t\geqslant 0\}$ 是由自由旋变相速度函数 $c_i(u,\eta),i=1,2$ 决定的马氏过程，并且已按基本耦合将它们耦合起来。问当 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$ 满足什么条件时，可以使此两过程一直保持顺序。即设 $\{P_\eta^{(i)};\eta\in X\}$，$\{\tilde{P}_{(\eta_1,\eta_2)}:(\eta_1,\eta_2)\in X\times X\}$ 分别是过程 $\{\eta_{it}:t\geqslant 0\}$ 及耦合过程 $\{(\eta_{1t},\eta_{2t}):t\geqslant 0\}$ 的分布。问在什么条件下，$\forall\eta_1\leqslant\eta_2$，都有

$$(4.2)\qquad \forall t\geqslant 0,\quad \tilde{P}_{(\eta_1,\eta_2)}(\eta_{1t}\leqslant\eta_{2t})=1.$$

从速度函数的直观意义来看，应该是：$\forall\eta_1\leqslant\eta_2$，$\eta_1,\eta_2\in X$，必定有

$$(4.3)\qquad \begin{cases}c_1(u,\eta_1)\leqslant c_2(u,\eta_2) & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c_1(u,\eta_1)\geqslant c_2(u,\eta_2) & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1,\end{cases}\ u\in S,$$

即在 u 处系统"1"的粒子生得比系统"2"慢，而死得比系统"2"快．事实上，有下列的

5. 定理 设 $\forall \eta_1, \eta_2 \in X, \eta_1 \leqslant \eta_2$ 条件(4.3)满足，则 $\forall \eta_1, \eta_2 \in X, \eta_1 \leqslant \eta_2$，(4.2) 成立。

证。 令 $F_q \triangleq \{(\eta_1, \eta_2): \eta_1 \leqslant \eta_2\}$

$$C \triangleq \{f \in \mathscr{D}(X \times X): f \geqslant 0 \text{且} f(F_q) = \{0\}\}$$

$\forall \lambda > 0$ 充分小，$f \in C$，由(1.3.7.10)知 $\exists h \in \mathscr{D}(X \times X)$ 使

(5.1) $\quad (I - \lambda \tilde{\Omega})^{-1} f = h$，因而 $(I - \lambda \tilde{\Omega}) h = f$.

则由(1.3.2.2)知 $\min\limits_{\zeta \in X \times X} h(\zeta) \geqslant \min\limits_{\zeta \in X \times X} f(\zeta)$，从而 $h \geqslant 0$。由于 F_q 为紧空间 $X \times X$ 的闭子集，所以它是紧集，因而 h 在 F_q 上达到 F_q 上的最大值，设最大点为 $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$，若能证明

(5.2) $\quad \tilde{\Omega} h(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \leqslant 0$,

则由(5.1)知 $h(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \leqslant f(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = 0$。于是由 $h \geqslant 0$ 知

(5.3) $\quad h(F_q) = \{0\}$，从而 $h \in C$.

故 $\forall t > 0$，取 n 充分大，使 $\frac{t}{n} = \lambda$ 充分小，$\forall f \in C$ 有

$$h_n \triangleq \left(I - \frac{t}{n} \tilde{\Omega}\right)^{-n} f \in C$$

令 $n \to \infty$，由(1.1.1.4)知

(5.4) $\quad f \in C \Rightarrow \tilde{S}(t) f \in C, \quad \forall t \geqslant 0$.

由(5.4)容易证明(4.2) $\forall \eta_1 \leqslant \eta_2$ 成立。事实上，任取 $\{\Lambda_m\} \subset \mathscr{S}$，$\Lambda_m \nearrow S$，则当 $m \to \infty$ 时，

(5.5) $\quad F_m \triangleq \{(\eta_1, \eta_2) \in X \times X: \eta_1(u) \leqslant \eta_2(u), u \in \Lambda_m\} \searrow F_q$

且 $f_m = 1 - I_{F_m} \in C$。于是 $\forall \eta_1 \leqslant \eta_2$，$(\eta_1, \eta_2) \in X \times X$，由(5.4)知 $\tilde{S}(t) f_m(\eta_1, \eta_2) = 0$，从而 $\forall t \geqslant 0$,

$$1 = \tilde{S}(t) I_{F_m}(\eta_1, \eta_2) = P_{(\eta_1, \eta_2)}((\eta_{1t}, \eta_{2t}) \in F_m)$$

令 $m \to \infty$ 即得(4.2)。

今往证(5.2)，其中 $h(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \max\{h(\eta_1, \eta_2): (\eta_1, \eta_2) \in F_q\}$

$(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in F_q$. 分三种情形讨论 $\tilde\Omega h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$ 的各项。

(i) $\tilde\eta_1(u)\neq\tilde\eta_2(u)$，此时由 $(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in F_q$ 导出 $({}_u\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in F_q$ 及 $(\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\in F_q$，从而 $h({}_u\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\leqslant h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$，$h(\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\leqslant h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$，于是 $\tilde\Omega h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$ 中相应的项不大于零。

(ii) $\tilde\eta_1(u)=\tilde\eta_2(u)=0$，此时由 $(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in F_q$ 导出 $({}_u\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\in F_q$，$(\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\in F_q$。从而 $h({}_u\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\leqslant h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$，$h(\tilde\eta_1,{}_u\tilde\eta_2)\leqslant h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$，于是 $\tilde\Omega h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$中相应的项不大于零．此时$({}_u\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in F_q$，但刚好由(4.3)的第一式知 $c_1(u,\tilde\eta_1)\leqslant c_2(u,\tilde\eta_2)$，于是 $\tilde\Omega h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$ 中相应的项

$$[c_1(u,\eta_1)-c_2(u,\tilde\eta_2)]^+[h({}_u\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)-h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)]=0.$$

(iii) $\tilde\eta_1(u)=\tilde\eta_2(u)=1$. 仿(ii) 并应用(4.3)的第二式同样可证 $\tilde\Omega h(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)$ 中相应的项不大于零。

总结 (i)—(iii) 即得(5.2)，故定理获证。□

6. 定义 设 $\mu_i\in\mathscr{P}(X)$，$i=1,2$。若 $\exists\nu\in\mathscr{P}(X\times X)$ 使

(6.1) $\quad\forall A\in\mathscr{F}$，$\nu(A\times X)=\mu_1(A)$，$\nu(X\times A)=\mu_2(A)$，

(6.2) $\quad\nu(F_q)=1$，$F_q\triangleq\{(\eta_1,\eta_2):\eta_1,\eta_2\in X,\ \eta_1\leqslant\eta_2)\}$，

则记 $\mu_1\leqslant\mu_2$。注意此时并不知道关系“$\leqslant$”有传递性。

定义 $\nu_i\in\mathscr{P}(X)$，$\nu_0(\theta)\triangleq1$，$\nu_1(\mathbf{1})\triangleq1$，则有

(6.3) $\quad\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$，$\nu_0\leqslant\mu$，$\mu\leqslant\nu_1$，$\mu\leqslant\mu$.

事实上，取 $\bar\nu_0=\nu_0\times\mu$，$\bar\nu_1=\mu\times\nu_1$，$\nu\in\mathscr{P}(X\times X)$，$\nu(\{(\eta,\eta):\ \eta\in A\})\triangleq\mu(A)$，则按定义可分别验证(6.3)的诸式成立。

7. 命题 设 $\mu_1,\mu_2\in\mathscr{P}(X)$，则

(i) $\mu_1\leqslant\mu_2\Rightarrow\forall\Lambda\subset S$，$\quad\mu_1(A_\Lambda)\leqslant\mu_2(A_\Lambda)$，$\quad A_\Lambda\triangleq\{\eta\in X:$
$\eta(u)=1,u\in\Lambda\}$；

(ii) $\mu_1\leqslant\mu_2$ 且 $\forall u\in S$，$\mu_1(A_{\{u\}})=\mu_2(A_{\{u\}})\Rightarrow\mu_1=\mu_2$；

(iii) $\mu_1\leqslant\mu_2$ 且 $\mu_2\leqslant\mu_1\Rightarrow\mu_1=\mu_2$.

证. 设 $\nu\in\mathscr{P}(X\times X)$ 满足(6.1)、(6.2)，则 $\forall\Lambda\subset S$，

$$\mu_1(A_A) = \nu((A_A \times X)\cap F_q) \leqslant \nu(X \times A_A) = \mu_2(A_A),$$

故 (i) 获证。若 $\mu_1(A_{\{u\}}) = \mu_2(A_{\{u\}})$, $u \in S$, 则

$$\begin{aligned}\nu(\{(\eta_1, \eta_2):\eta_1(u) = 0, \eta_2(u) = 1\}) &= \nu(\{(\eta_1, \eta_2):\eta_2(u) = 1\}) - \nu(\{(\eta_1,\eta_2):\eta_1(u) = \eta_2(u) = 1\}) \\ &= \nu(X \times A_{\{u\}}) - \nu((A_{\{u\}} \times X)\cap F_q) \\ &= \mu_2(A_{\{u\}}) - \mu_1(A_{\{u\}}) = 0,\end{aligned}$$

于是

$$\nu(\{(\eta,\eta):\eta\in X\}) = \nu\Big(F_q\setminus \bigcup_{u\in S}\{(\eta_1, \eta_2):\eta_1(u) = 0, \eta_2(u) = 1\}\Big) = 1,$$

故

$$\begin{aligned}\mu_1(A) &= \nu((A \times X)\cap\{(\eta,\eta):\eta\in X\}) \\ &= \nu(\{(\eta, \eta):\eta\in A\}) = \mu_2(A), \ \forall A\in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

从而 (ii) 获证. 由 (i)、(ii) 立得 (iii)

8. 命题 若 $f:X \to R\triangleq(-\infty, \infty)$ 且 $\forall\eta_1, \eta_2\in X, \eta_1 \leqslant \eta_2$ 有 $f(\eta_1)\leqslant f(\eta_2)$, 则称 f **在 X 上不降.**

设 $\mu_1 \leqslant \mu_2$, $\mu_1,\mu_2\in \mathscr{P}(X)$, $f\in C_b(X)$ 在 X 上不降,则

$$\int f d\mu_1 \leqslant \int f d\mu_2. \tag{8.1}$$

证. 由定义 6, $\exists\nu\in \mathscr{P}(X \times X)$ 使(6.1),(6.2)成立,于是

$$\begin{aligned}\int f(\eta_1)\mu_1(d\eta_1) &= \int_{\{\eta_1\leqslant\eta_2\}} f(\eta_1)\nu(d\eta_1 \times d\eta_2) \\ &\leqslant \int_{\{\eta_1\leqslant\eta_2\}} f(\eta_2)\nu(d\eta_1 \times d\eta_2) \\ &= \int f(\eta_2)\mu_2(d\eta_2). \square\end{aligned}$$

注 可以证明 (见 [6, Ch. II. Theorem 2.4]: 若 $\mu_1, \mu_2\in \mathscr{P}(X)$, $\forall f\in C_b(X)$ 在 X 上不降,(8.1)成立,则 $\mu_1 \leqslant \mu_2$.

由此结果及命题 8 即知关系"$\leqslant$"有传递性，即 $\mu_1 \leqslant \mu_2,\ \mu_2 \leqslant \mu_3 \Rightarrow \mu_1 \leqslant \mu_3$。于是由(6.3)及命题 7 知关系"$\leqslant$"是 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个偏序关系。

还有：若 $\mu_n^{(i)} \in \mathscr{P}(X)$，$\mu_n^{(1)} \leqslant \mu_n^{(2)}$，$n \in Z_+$，$i = 1, 2$，且 $\exists \mu^{(i)}$ 使 $\mu_n^{(i)} \Rightarrow \mu^{(i)}, i = 1, 2$。则由上引结果易知 $\mu^{(1)} \leqslant \mu^{(2)}$。

9. 定理 设 $c_i(u,\eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$，$i = 1,2$ 满足(4.3)及第 1 目的假设，$\{S_i(t): t \geqslant 0\}$ 是相应的半群。则

(9.1) $\quad \mu_1 \leqslant \mu_2,\ \mu_1,\ \mu_2 \in \mathscr{P}(X) \Rightarrow \forall t \geqslant 0, \mu_1 S_1(t) \leqslant \mu_2 S_2(t)$。

若还有 $\mu_i S_i(t) \Rightarrow \bar{\mu}_i$，$i = 1,2$，则 $\bar{\mu}_1 \leqslant \bar{\mu}_2$。

证。先证(9.1)。设 $\mu_1 \leqslant \mu_2$，则由定义 6 知 $\exists \nu \in \mathscr{P}(X \times X)$ 满足(6.1),(6.2),要证(9.1),只要证明 $\nu\tilde{S}(t)$，$\mu_1 S_1(t)$，$\mu_2 S_2(t)$ 分别代替(6.1),(6.2)中 ν，μ_1，μ_2 时,(6.1)，(6.2)仍然成立就够了。

由于 $c_i(u,\eta)$，$i = 1,2$，满足(4.3),所以由定理 5 知(4.2)成立。于是按(5.5)定义 $F_m, I_{F_m} \in C_b(X \times X)$，

$$\begin{aligned}
\nu\tilde{S}(t)(F_q) &= \lim_{m\to\infty} \nu\tilde{S}(t)(F_m) = \lim_{m\to\infty} \int (\tilde{S}(t) I_{F_m}) d\nu \\
&\xlongequal{(6.2)} \lim_{m\to\infty} \int_{F_q} \tilde{P}(t,\ \cdot,\ F_m) d\nu \xlongequal{(4.2)} \nu(F_q) \\
&= 1, \forall t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

设 A 是 X 中任一柱集,则 $f \triangleq I_{A\times X} \in C_b(X \times X)$ 且 $f(\eta_1,\ \eta_2) = I_A(\eta_1)$。于是由定理 3 知 $\forall t \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}
\nu\tilde{S}(t)(A \times X) &= \int \tilde{S}(t) f d\nu = \int S_1(t) I_A d\mu_1 \\
&= \mu_1 S_1(t)(A).
\end{aligned}$$

由单调类定理知上式 $\forall A \in \mathscr{F}$ 成立，即 $\mu_1 S_1(t)$ 是 $\nu\tilde{S}(t)$ 的边缘分布。同法可证 $\mu_2 S_2(t)$ 是 $\nu\tilde{S}(t)$ 的边缘分布。故由定义 6 知 $\forall t \geqslant 0$，$\mu_1 S_1(t) \leqslant \mu_2 S_2(t)$，即(9.1)成立。

由附录引理 3.8 知 $\exists \{t_n\} \subset R_+$，$t_n \to \infty$ 及 $\bar{\nu} \in \mathscr{P}(X \times X)$

使 $\nu\tilde{S}(t_n) \Rightarrow \bar{\nu}$ $(n \to \infty)$. $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，令

$$F_\Lambda \triangleq \{(\eta_1, \eta_2): \eta_1, \eta_2 \in X, \eta_1(u) \leqslant \eta_2(u), u \in \Lambda\},$$

$$A_\Lambda \triangleq \{\eta \in X: \eta(u) = 1, u \in \Lambda\},$$

则由附录推论 3.7 知

$$\bar{\nu}(F_\Lambda) = \lim_{t_n \to \infty} \nu\tilde{S}(t_n)(F_\Lambda) \overset{(4.2)}{=\!=} 1,$$

由 $F_\Lambda \searrow F_q(\Lambda \uparrow S)$ 知 $\bar{\nu}(F_q) = 1$. 其次再由附录引理 3.9 知

$$\bar{\nu}(A_\Lambda \times X) = \lim_{n \to \infty} \nu\tilde{S}(t_n)(A_\Lambda \times X)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu_1 S_1(t_n)(A_\Lambda) = \bar{\mu}_1(A_\Lambda),$$

由于 $\{A_\Lambda: \Lambda \in \mathscr{S}\}$ 是一 π- 系，且 $\sigma(A_\Lambda: \Lambda \in \mathscr{S}) = \mathscr{F}$，所以由单调类定理知 $\forall A \in \mathscr{F}$，$\bar{\nu}(A \times X) = \bar{\mu}_1(A)$. 同法可证 $\bar{\nu}(X \times A) = \bar{\mu}_2(A)$，由定义 6 即知 $\mu_1 \leqslant \mu_2$.□

注 定理 9 的后一部分显然还可以将条件 $\mu_i S_i(t) \Rightarrow \bar{\mu}_i$ 改作 $\mu_i S(t_n) \Rightarrow \bar{\mu}$，$i = 1, 2$，而略作推广.

10. 推论 在定理 9 的假设下，采用其记号若 $\{S_2(t): t \geqslant 0\}$ 遍历于 ν_0，则 $\{S_1(t): t \geqslant 0\}$ 亦然.

证. 由定理 9 命题 7 及假设知 $\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$，$\Lambda \in \mathscr{S}$，$\Lambda \neq \phi$

$$0 \leqslant \mu S_1(t)(A_\Lambda) \leqslant \mu S_2(t)(A_\Lambda) \to \nu_0(A_\Lambda) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \mu S_1(t)(A_\phi) = \lim_{t \to \infty} \mu S_1(t)(X) = 1.$$

于是由附录引理 3.9 知 $S_1(t) \Rightarrow \nu_0$. □

§3 吸 引 模 型

本节将前节结果应用于吸引粒子系统. 首先给出

1. 定义 设 S 为可数集，$X = \{0, 1\}^S$，$c(u, \eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$ 为自旋变相速度函数，如果满足 $\forall \eta_1 \leqslant \eta_2$，$\eta_1$，$\eta_2 \in X$，

$$(1.1)\quad \begin{cases} c(u,\eta_1) \leqslant c(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0, \\ c(u,\eta_1) \geqslant c(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1, \end{cases} \quad u\in S,$$

则称 $c(u,\eta)$ 为**吸引**的，相应的粒子系统称为吸引粒子系统，如果 $c(u,\eta)$ 满足定理 1.2.7 的条件（即 $c(u,\cdot)$, $u\in S$, 一致有界连续且变差一致可和），则称相应的马尔可夫过程、马氏半群也为吸引的。吸引粒子系统包括一系列重要的例子。

2. 例 (*a*) **接触模型**。设 $\lambda\geqslant 0$, $p(u,v)$ 为 S 上的一个转移概率矩阵，即 $p(u,v)\geqslant 0, u, v\in S$, $\sum_v p(u,v)=1, u\in S$

$$(2.1)\quad c_\lambda(u,\eta) \triangleq \begin{cases} 1 & \eta(u)=1, \\ \lambda\sum_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0. \end{cases}$$

显然它满足(1.1)，且容易验证：它满足定理 1.2.7 的条件。

(*b*) **伊辛模型**. 设 $c(u,\eta)$由导言的(3.2)定义，其中的交互作用势Φ: $\mathscr{S}\backslash\{\phi\}\to R_+$.(注意此处与导言中的(3.2)不同的是要求$\Phi$是取非负值函数且为对势. 显然 $\forall\eta_1,\eta_2\in X$, $\eta_1\leqslant\eta_2$, 当 $\eta_1(u)=\eta_2(u)=0$ 时，

$$\begin{aligned} &-\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\prod_{v\in A}(2\eta_1(v)-1) \\ &=\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\prod_{v\in A\backslash u}(2\eta_1(v)-1) \\ &\leqslant\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\prod_{v\in A\backslash u}(2\eta_2(v)-1) \\ &=-\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\prod_{v\in A}(2\eta_2(v)-1); \end{aligned}$$

当 $\eta_1(u)=\eta_2(u)=1$ 时，

$$-\beta\sum_{A\ni u}\Phi(A)\prod_{v\in A}(2\eta_1(v)-1)$$

$$= -\beta \sum_{A \ni u} \Phi(A) \prod_{v \in A \setminus u} (2\eta_1(v) - 1)$$

$$\geqslant -\beta \sum_{A \ni u} \Phi(A) \prod_{v \in A} (2\eta_2(v) - 1)$$

故由定义 1 知伊辛模型是吸引的.

(c) **选举模型.** 设 $X = \{0,1\}^S$, $\kappa \geqslant 0$, $\{p(u,v), u,v \in S\}$ 为 S 上的一个转移概率矩阵,令

$$(2.2) \qquad c_\kappa(u, \eta) \triangleq \begin{cases} \sum_v p(u,v)(1 - \eta(v)), & \eta(u) = 1, \\ \kappa \sum_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u) = 0. \end{cases}$$

当 $\kappa = 1$ 时,则与(1.2.10.1)定义的模型一致,当 $\kappa \neq 1$ 时,有时称为有偏选举模型,容易验证它满足(1.1),因而是吸引模型,并且仿推论 1.2.10 可证与(2.2)相应的过程存在.

(d) **多数选举模型.** 设 $S = Z^d$, $d \geqslant 1$, $\delta \in (0, 2^{-1})$, $N \subset S$ 为包含 0 的且有奇数个元的集,

$$(2.3) \qquad c(u, \eta) = \begin{cases} \delta, & |\{v: \eta(v) \neq \eta(u), v \in u+N\}| > \dfrac{|N|}{2}, \\ 1-\delta, & |\{v: \eta(v) \neq \eta(u), v \in u+N\}| > \dfrac{|N|}{2}, \end{cases}$$

其中 $|N|$ 表示N的元数, $u + N \triangleq \{v + u: v \in N\}$. 则此模型称为多数选举模型,它是吸引的.

事实上, $\forall \eta_1 \leqslant \eta_2$, η_1, $\eta_2 \in X$,

$$\{v: \eta_1(v) \neq \eta_1(u),\ v \in u + N\}$$

$$\begin{cases} \subset \{v: \eta_2(v) \neq \eta_2(u), v \in u + N\}, & \eta_1(u) = \eta_2(u) = 0, \\ \supset \{v, \eta_2(v) \neq \eta_2(u), v \in u + N\}, & \eta_1(u) = \eta_2(u) = 1. \end{cases}$$

且 $\delta < 1 - \delta$. 所以(2.3)定义的 $c(u,\eta)$ 满足(1.1),因而模型是吸引的.

注: 当 $\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，则多数选举模型就不是吸引的。当伊辛模型中的 $\beta<0$ 时，也不是吸引的。

3. 定理 设过程是吸引的，其相应马氏半群为 $\{S(t):t\geqslant 0\}$，则下列结论成立:

(i) $\forall t\geqslant s\geqslant 0$, $\nu_0 S(s)\leqslant \nu_0 S(t)$, $\nu_1 S(t)\leqslant \nu_1 S(s)$;

(ii) $\forall \mu\in\mathscr{P}$, $(X)t\geqslant 0$, $\nu_0 S(t)\leqslant \mu S(t)$, $\mu S(t)\leqslant \nu_1 S(t)$;

(iii) $\exists \bar{\nu}_i\in\mathscr{P}(X)$, $i=0,1$ 使当 $t\to\infty$ 时，

$$\nu_0 S(t)\Longrightarrow \bar{\nu}_0 \qquad \nu_1 S(t)\Longrightarrow \bar{\nu}_1;$$

(iv) 设 $\mu\in\mathscr{P}(X)$，若 $\exists\{t_n\}\subset[0,\infty)$, $t_n\nearrow\infty$ 使 $\mu S(t_n)\Rightarrow \bar{\mu}(n\to\infty)$，则

$$\bar{\nu}_0\leqslant\bar{\mu},\ \bar{\mu}\leqslant\bar{\nu}_1,\ \text{从而}\ \bar{\nu}_0\leqslant\bar{\nu}_1;$$

(v) $\forall\mu\in\mathscr{I}$, $\bar{\nu}_0\leqslant\mu$, $\mu\leqslant\bar{\nu}_1$;

(vi) $\bar{\nu}_0$, $\bar{\nu}_1\in\mathscr{I}_e$，其中

$$\mathscr{I}_e\triangleq\{\mu\in\mathscr{I}:\mu=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2,\ \alpha\in(0,1),\ \mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{I}\Longrightarrow\mu_1=\mu_2=\mu\}$$

为 $\mathscr{I}$ 的极点集，即 $\mathscr{I}$ 中不能表成其它元的真凸组合的元作成的集。

证。 证明的思路是简单的。即 $\nu_0 S(t)$, $\nu_1 S(t)$ 分别关于 t"单调"上升、下降。

首先由(1.6.3)知 $\forall\mu\in\mathscr{P}(x)$, $\nu_0\leqslant\mu$, $\mu\leqslant\nu_1$，再由定理2.9 (令 $c_i(u,\eta)\triangleq c(u,\eta)$, $i=1,2$) 即得(ii). 由(ii)知 $\forall t\geqslant s\geqslant 0$,

$$\nu_0 S(s)\leqslant(\nu_0 S(t-s))S(s)=\nu_0[S(t-s)S(s)]=\nu_0 S(t).$$

同法可证(i)的另一式。

$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，由命题 2.7 (i) 知 $\nu_0 S(t)(A_\Lambda)\uparrow$ (当 $t\uparrow$)，于是 $\lim\limits_{t\to\infty}\nu_0 S(t)(A_\Lambda)$ 存在。由附录引理 3.6 知 $\nu_0 S(t)$ 当 $t\to\infty$ 时弱收敛。同法可证(iii)的另一结论。由(1.6.3)、定理 2.9 及其註得知

(iv) 成立。若 $\mu\in\mathscr{I}$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\mu S(t)=\mu$，因而由 (iv) 即得(v)。最后往证 (vi)：

容易证明，$\bar{\nu}_i\in\mathscr{I}$。设 $\exists\mu_1,\mu_2\in\mathscr{I}$，$\alpha\in(0,1)$ 使

(3.1) $$\bar{\nu}_0=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2,$$

则由 (v) 知 $\bar{\nu}_0\leqslant\mu_1,\mu_2$。若 $\bar{\nu}_0\neq\mu_1$，则由命题 1.7(i) 知 $\exists\Lambda\in\mathscr{S}$，使 $\bar{\nu}_0(A_\Lambda)<\mu_1(A_\Lambda)$ （否则 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\bar{\nu}_0(A_\Lambda)=\mu_1(A_\Lambda)$，从而 $\bar{\nu}_0=\mu_1$）于是

$$\bar{\nu}_0(A_\Lambda)=\alpha\bar{\nu}_0(A_\Lambda)+(1-\alpha)\bar{\nu}_0(A_\Lambda)<\alpha\mu_1(A_\Lambda)$$
$$+(1-\alpha)\mu_2(A_\Lambda).$$

这与(3.1)矛盾。所以 $\bar{\nu}_0=\mu_1$，同理 $\bar{\nu}_0=\mu_2$。即 $\bar{\nu}_0\in\mathscr{I}_e$。同法可证 $\bar{\nu}_1\in\mathscr{I}_e$。□

4. 定理 设过程是吸引的，则下列三命题等价：

(i) 过程遍历；

(ii) $\mathscr{I}$ 为单元集；

(iii) $\bar{\nu}_0=\bar{\nu}_1$，其中 $\bar{\nu}_0,\bar{\nu}_1$ 由定理 3(iii) 确定。

证. 由过程遍历的定义 (定义 1.4.4) 知 (i)$\Longrightarrow$(ii)，由定理 3(vi) 知 (ii)$\Longrightarrow$(iii)。

最后往证：(iii)$\Longrightarrow$(i)。若 $\mu\in\mathscr{I}$，则由定理 3(v) 知 $\bar{\nu}_0\leqslant\mu$，$\mu\leqslant\bar{\nu}_1=\bar{\nu}_0$ (由 (iii)!)，从而由命题 2.7(iii) 知 $\mu=\bar{\nu}_0$。故 $\mathscr{I}$ 为单元集。其次 $\forall\mu\in\mathscr{P}(x)$，由定理 3(ii) 及命题 2.7(i) 知 $\forall t\geqslant 0$，$\Lambda\in\mathscr{S}$ 有

$$\nu_0 S(t)(A_\Lambda)\leqslant\mu S(t)(A_\Lambda)\leqslant\nu_1 S(t)(A_\Lambda).$$

令 $t\to\infty$ 得

$$\bar{\nu}_0(A_\Lambda)\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\mu S(t)(A_\Lambda)\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\mu S(t)(A_\Lambda)=\bar{\nu}_1(A_\Lambda),$$

由 (iii) 知

(4.1) $$\forall\Lambda\in\mathscr{S},\quad\lim_{t\to\infty}\mu S(t)(A_\Lambda)=\bar{\nu}_0(A_\Lambda).$$

由附录引理 3.9 知 $\mu S(t)\Longrightarrow\bar{\nu}_0$，故过程遍历。□

5. 例 设 $(p(u,v): u,v\in S)$ 是 S 上的一个转移概率，$\beta,\delta\geq 0$，

$$
(5.1)\qquad c(u,\eta)=\begin{cases}\beta+\sum_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ \delta+\sum_v p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=1.\end{cases}
$$

显然此模型是吸引的。而且当 $\beta=\delta=0$ 时，就是推论 1.2.10，定义的选举模型，用该推论的证法可以证明过程存在。现在来讨论它的遍历性。

任给定 $u\in S$，令 $f_u(\eta)\triangleq\eta(u)$，则 $f_u\in\mathscr{D}(X)$ 且

$$
(5.2)\qquad (\Omega f_u)(\eta)=c(u,\eta)(1-2\eta(u)).
$$

由于 $\bar{\nu}_i\in\mathscr{I}$，$i=0,1$，故由命题 1.4.2(i) 及(5.2)，(5.1)即得（记 $A_u\triangleq\{\eta\in X:\eta(u)=1\}$）

$$
\begin{aligned}
(5.3)\qquad 0=\int\Omega f_u d\bar{\nu}_i&=\int c(u,\eta)(1-2\eta(u))\bar{\nu}_i(d\eta)\\
&=\beta-(\beta+\delta)\bar{\nu}_i(A_u)\\
&\quad+\sum_v p(u,v)[\bar{\nu}_i(A_v)-\bar{\nu}_i(A_u)],\\
&=\beta-(\beta+\delta+1)\bar{\nu}_i(A_u)+\sum_v p(u,v)\bar{\nu}_i(A_v)
\end{aligned}
$$

$i=0,1$

令 $g(u)\triangleq\bar{\nu}_1(A_u)-\bar{\nu}_0(A_u)$，$u\in S$，则由定理 3(iv) 知

$$
(5.4)\qquad 0\leq g(u)\leq 1,\ u\in S.
$$

将(5.3)的 $i=1$ 的式子减去 $i=0$ 的式子即得

$$
(5.5)\qquad \sum_v p(u,v)g(v)=g(u)(\beta+\delta+1),\ u\in S.
$$

今往证：$\beta+\delta>0$ 时过程遍历，为此先证：

$$
(5.6)\qquad \beta+\delta>0\Longrightarrow g(u)\equiv 0,\ u\in S.
$$

令 $\bar{g}\triangleq\sup_u g(u)$，则由(5.5)知 $\bar{g}\geq g(u)(\beta+\delta+1)$，于是 $\bar{g}\geq\bar{g}(\beta+\delta+1)$，若 $\beta+\delta>0$，则由 $\bar{g}\geq 0$ 知 $\bar{g}=0$。故 (5.6)

成立。于是 $\forall u\in S$，$\bar{\nu}_0(A_u)=\bar{\nu}_1(A_u)$，再由定理 3(iv) 知 $\bar{\nu}_0\leqslant\bar{\nu}_1$，故由命题 2.7(ii) 知 $\bar{\nu}_0=\bar{\nu}_1$，从而由定理 4 知过程遍历。

当 $\beta>0$，$\delta=0$ 时由(5.1)有 $c(u,1)=0$，$\forall u\in S$，于是 ν_1 为不变测度（$\int\Omega f d\nu_1=(\Omega f)(1)=0$），故由上面结论知此时有

(5.7) $\qquad \forall\mu\in\mathscr{P}(X)$，$\mu S(t)\Longrightarrow\nu_1$，$\mathscr{I}=\{\nu_1\}$。

当 $\beta=0$，$\delta>0$ 时，同法可证：

(5.8) $\qquad \forall\mu\in\mathscr{P}(X)$，$\mu S(t)\Longrightarrow\nu_0$，$\mathscr{I}=\{\nu_0\}$。

当 $\beta=\delta=0$ 时，此时 $\mathscr{I}\supset\{\nu_0,\nu_1\}$，过程不遍历。

6. 定理 设 $c(u,\eta)$，$u\in S$，$\eta\in X$，为吸引的自旋变相速度函数，且满足定理 1.2.7 的条件（即 $c(u,\cdot)$，$u\in S$，连续一致有界且变差一致可和），且 ν_0 是它的不变测度。定义一族自旋变相速度函数 $\{c_\lambda(u,\eta):\lambda\geqslant 0\}$ 如下：

$$c_\lambda(u,\eta)=\begin{cases}\lambda c(u,\eta), & \eta(u)=0\\ c(u,\eta), & \eta(u)=1,\end{cases}\quad u\in S,\ \eta\in X. \tag{6.1}$$

则有一临界值 $\lambda_c\in[0,\infty]$ 存在，使得 $\lambda<\lambda_c$ 时，相应于 $c_\lambda(u,\eta)$ 的过程遍历，当 $\lambda>\lambda_c$，相应于 $c_\lambda(u,\eta)$ 的过程非遍历。

证. $\forall\lambda\geqslant 0$，容易证明相应于 $c_\lambda(u,\eta)$ 的过程存在。其次 ν_0 为 $c(u,\eta)$ 的不变测度当且仅当 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$，

$$0=\int\Omega f d\nu_0=\Omega f(\theta),$$

取 $f(\eta)=\eta(u)$ 即得 $c(u,\theta)=0$，反之若 $c(u,\theta)=0$，$u\in S$，成立，则显然有 $0=\Omega f(\theta)$。故 $\forall\lambda\geqslant 0$，$\nu_0$ 是 $c_\lambda(u,\eta)$ 的不变测度。

若 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2$，则由 $c(u,\eta)$ 的吸引性知 $c_i(u,\eta)\triangleq c_{\lambda_i}(u,\eta)$ $i=1,2$，满足(2.4.3)。若与 $c_2(u,\eta)$ 相应的过程遍历，则由 ν_0 是它的不变测度知遍历于 ν_0。于是由推论 2.10 知与 $c_1(u,\eta)$ 相应的过程也遍历于 ν_0。令

$$\lambda_c=\sup\{\lambda\geqslant 0;\ 与\ c_\lambda(u,\eta)\ 相应的过程遍历\}.$$

则 λ_c 具有定理所要求的性质．今往证之．

若 $\lambda<\lambda_c$，则必有 $\lambda_1\in(\lambda,\lambda_c)$ 使与 $c_{\lambda_1}(u,\eta)$ 相应的过程遍历．因而由上面所得结果知与 $c_\lambda(u,\eta)$ 相应的过程遍历．若 $\lambda>\lambda_c$，则由 λ_c 的定义知与 $c_\lambda(u,\eta)$ 相应的过程不遍历．□

7. 注 定理对于一系列特殊的 $c(u,\eta)$ 提出了下面的一些问题：(i) 是否 $\lambda_c>0$?，(ii) 是否 $\lambda_c<\infty$? (iii) λ_c 的确切值如何? (iv) 当 $\lambda=\lambda_c$ 时，过程是否遍历? 注意定理 2.9 提供了一种手段来比较两族单参数自旋变相过程的临界值．当其中一族过程吸引时，则条件(2.4.3)就变得简单一些，此时只需考虑

$$(7.1)\qquad \begin{cases} c_1(u,\eta)\leqslant c_2(u,\eta), & \eta(u)=0\\ c_1(u,\eta)\geqslant c_2(u,\eta), & \eta(u)=1\end{cases}$$

即可．因为例如 $c_1(u,\eta)$ 吸引时，则 $\forall\eta_1\leqslant\eta_2,\ \eta_1,\ \eta_2\in X$,

$$\begin{cases} c_1(u,\eta_1)\leqslant c_1(u,\eta_2)\leqslant c_2(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c_1(u,\eta_1)\geqslant c_1(u,\eta_2)\geqslant c_2(u,\eta_2) & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1.\end{cases}$$

即 (7.1) $\Longrightarrow$ (2.4.3)．而 (2.4.3) $\Longrightarrow$ (7.1) 显然．

8. 例 现在我们来讨论一些例子．

(i) 具参数 $\lambda\geqslant 0$ 的接触过程．此时 $c_\lambda(u,\eta)$ 由(2.1)定义，

$$c(u,\eta)=\begin{cases}\sum\limits_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ 1, & \eta(u)=1.\end{cases}$$

由于 $c(u,\theta)=0$，$u\in S$，故 ν_0 是相应于 $c(u,\eta)$ 的过程的不变测度，因而由定理 7 知临界值 λ_c 存在．下面应用定理 1.4.5 对 λ_c 的下界作一估计．

由(1.2.2.4)及(1.2.4.6)知此时

$$(8.1)\qquad \varepsilon_\lambda=\inf\{c_\lambda(u,\eta)+c_\lambda(u,{}_u\eta):u\in S,\ \eta\in X\}.$$

由定理 1.2.7 的计算此时

$$(8.2)\qquad M_\lambda=\sup_u\sum_{w\neq u}\Delta_{c_\lambda(u,\cdot)}(w).$$

于是

$$\varepsilon_\lambda = \inf\left\{1+\lambda\sum_v p(u,\ v)\eta(v):\ u\in S,\ \eta\in X\right\} = 1.$$

当 $w \neq u$ 时，

$$|c_\lambda(u,\ {}_w\eta) - c_\lambda(u,\ \eta)| = \begin{cases}0, & \eta(u)=1,\\ \lambda p(u,w), & \eta(u)=0\end{cases}$$

故 $\Delta_{c_\lambda(u,\cdot)}(w) = \lambda p(u,\ w)$，因而 $M_\lambda = \sup_u \lambda(1-p(u,\ u)) = \lambda(1-\inf p(u,u))$。因此由定理 1.4.5 知当 $\lambda(1-\inf_u p(u,u))<1$ 时，过程遍历。这就说明对接触过程来说，

$$\lambda_c \geqslant (1-\inf_u p(u,u))^{-1}.$$

如果考虑具参数 λ 的基本接触过程，因为此时的速度函数

$$c_\lambda(u,\eta) = \begin{cases}1, & \eta(u)=1\\ \lambda\sum\limits_{|v-u|=1}\eta(v), & \eta(v)=0\end{cases}$$

故其临界值

$$\lambda_c \geqslant \frac{1}{2d}.$$

(ii) 具参数 $\kappa \geqslant 0$ 的选举过程，此时速度函数由(2.2)定义，

$$c(u,\ \eta) = \begin{cases}\sum\limits_v p(u,\ v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ \sum\limits_v p(u,\ v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=1.\end{cases} \tag{8.3}$$

由于 $c(u,\theta)=0$，$u\in S$，ν_0 是相应于 $c(u,\eta)$ 的过程的不变测度，所以由定理 7 知临界值 κ_c 存在。现在来求 κ_c。事实上 $\forall\kappa\geqslant 0$，都有 $c_\kappa(u,\ \theta) = c_\kappa(u,\ 1) = 0$，$u\in S$。于是由命题 1.4.2 知 $\{\nu_0,\ \nu_1\}\subset\mathscr{I}_\kappa$，故不遍历，因而

$$\kappa_c = 0.$$

而且在 $\kappa=\kappa_c$ 处过程不遍历。

现在给出 $\mathscr{I}$ 为单元集的另一条件。

9. 定义 设 $\{\Lambda_n\}\subset\mathscr{S}$，$\Lambda_n\nearrow S$，$\forall u\in S$，$i=0,1$，$n\geqslant 1$，定义

$$(9.1)\qquad \eta^i\in X:\ \eta^i(u)\triangleq\begin{cases}\eta(u), & u\in\Lambda_n,\\ i, & u\notin\Lambda_n,\end{cases}\quad M(u)\triangleq\sup_{\eta}c(u,\eta),$$

$$(9.2)\qquad c_i^{(n)}(u,\eta)\triangleq\begin{cases}c(u,\eta^i), & u\in\Lambda_n,\\ 0, & u\notin\Lambda_n,\ \eta(u)=i,\\ M(u) & u\notin\Lambda_n,\ \eta(u)\neq i.\end{cases}$$

模型 $c_i^{(n)}(u,\eta)$ 可以想像为由原来的系统按下列方式而得到：(i) 在 Λ_n 外各位置的状态只要一经达到 i 就停留在 i，即 i 为吸收态；(ii) 在 Λ_n 内每一位置上坐标改变的速率，按 Λ_n 外的坐标都冻结在 i 来改变；(iii) 在 Λ_n 外各位置的坐标如果不在 i，它就以尽可能大的速度 $M(u)$ 转到 i。实际上在多数情形下，一开始就让系统在 Λ_n 处各位置的状态都处于 i，所以速率 $M(u)$ 是没有多大关系的。这样与 $c_0^{(n)}(u,\eta)$，$c_1^{(n)}(u,\eta)$ 相应的过程实质上是有限系统，它们的不变测度较易研究；而且当 $n\to\infty$ 时它们分别从下面和从上面逼近原来与 $c(u,\eta)$ 相应的系统，从而有利于分析原来过程的不变测度，下面将分几条引理将这些明确表达出来。然后给出 $\mathscr{I}$ 为单元素及原来过程遍历的条件。

10. 引理 设 $c(u,\cdot)$，$u\in S$ 为 X 上的一致有界连续函数族，且变差一致可和。设 $\Omega,\Omega_i^{(n)}$ 分别为由 $\{c(u,\cdot):u\in S\}$，$\{c_i^{(n)}(u,\cdot):u\in S\}$ 按(1.2.7.2)在 $\mathscr{D}(X)$ 上定义的算子；$\{S(t):t\geqslant 0\}$，$\{S_i^{(n)}(t):t\geqslant 0\}$ 分别为以 $\bar{\Omega}$，$\bar{\Omega}_i^{(n)}$ 为无穷小母元的马氏半群。则对$[0,\infty)$的任何紧子集K及 $f\in C_b(X)$，$i=0,1$ 都有

$$(10.1)\qquad \sup_{t\in K}\|S_i^{(n)}(t)f-S(t)f\|\to 0\ (n\to\infty).$$

证。 由关于 $\{c(u,\cdot):u\in S\}$ 的假设及 $c_i^{(n)}(u,\eta)$ 的定义易

知$\{c_i^{(n)}(u,\cdot):u\in S\}$ 也是X上的一致有界连续函数族且变差一致可和。于是 $\{S(t):t\geqslant 0\}$，$\{S_i^{(n)}(t):t\geqslant 0\}$ 存在。由(9.1)，(9.2)知对任意给定的 $u\in S$，$i\in\{0,1\}$

$$\|c(u,\cdot)-c_i^{(n)}(u,\cdot)\|=\sup_\eta|c(u,\eta)-c_i^{(n)}(u,\eta)|\to 0$$

$$(n\to\infty).$$

于是 $\forall f\in\mathscr{D}(X)$，由控制收敛定理知

$$\text{(10.2)}\qquad \|\Omega f-\Omega_i^{(n)}f\|\leqslant\sum_u\|c(u,\cdot)-c_i^{(n)}(u,\cdot)\|\Delta_f(u)$$

$$\to 0\quad(n\to\infty)$$

故由推论 1.2.6 知定理的结论成立。□

11. 引理 设 $c(u,\eta)$ 为吸引速度函数，则 $\forall i\in\{0,1\}$，$n\geqslant 1$，$c_i^{(n)}(u,\eta)$ 也是吸引速度函数。而且具有下列性质：$\forall\eta_1\leqslant\eta_2$，$\eta_1,\eta_2\in X$，有

$$\text{(11.1)}\qquad\begin{cases}c_0^{(n)}(u,\eta_1)\leqslant c_0^{(n+1)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c_0^{(n)}(u,\eta_1)\geqslant c_0^{(n+1)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1.\end{cases}$$

$$\text{(11.2)}\qquad\begin{cases}c_1^{(n+1)}(u,\eta_1)\leqslant c_1^{(n)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c_1^{(n+1)}(u,\eta_1)\geqslant c_1^{(n)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1,\end{cases}$$

$$\text{(11.3)}\qquad\begin{cases}c_0^{(n)}(u,\eta_1)\leqslant c(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c_0^{(n)}(u,\eta_1)\geqslant c(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1.\end{cases}$$

$$\text{(11.4)}\qquad\begin{cases}c(u,\eta_1)\leqslant c_1^{(n)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=0,\\ c(u,\eta_1)\geqslant c_1^{(n)}(u,\eta_2), & \eta_1(u)=\eta_2(u)=1.\end{cases}$$

证. 按照定义 9 的(9.1)，(9.2)逐条验证即得所列结论。作为例子，我们验证 $c_i^{(n)}(u,\eta)$ 的吸引性。给定 $n\geqslant 1$ 设 $\eta_1\leqslant\eta_2$，η_1，$\eta_2\in X$，$\eta_1(u)=\eta_2(u)=0$。当 $u\in\Lambda_n$ 时，$\eta_1^i(u)=\eta_2^i(u)=0$，$\eta_1^i\leqslant\eta_2^i$，于是

$$c_i^{(n)}(u,\eta_1)-c_i^{(n)}(u,\eta_2)=c(u,\eta_1^i)-c(u,\eta_2^i)\leqslant 0.$$

当 $u\bar\in\Lambda_n$ 时，

$$c_i^{(n)}(u,\eta_1)-c_i^{(n)}(u,\eta_2)$$
$$=\begin{cases}0-0=0 & i\neq 0(=\eta_1(u)=\eta_2(u)),\\ M(u)-M(u)=0 & i=0(=\eta_1(u)=\eta_2(u)).\end{cases}$$

同样可验证：$\forall \eta_1\leqslant\eta_2,\ \eta_1,\eta_2\in X,\ \eta_1(u)=\eta_2(u)=1$，有

$$c_i^{(n)}(u,\eta_1)\geqslant c_i^{(n)}(u,\eta_2).$$

于是证明了 $c_i^{(n)}(u,\eta)$ 的吸引性。

12. 定理 设 $c(u,\cdot)$，$u\in S$，是X上一致有界的连续函数族且变差一致可和，$c(u,\eta)$ 为吸引的，ν_i，$\bar{\nu}_i$ $c_i^{(n)}(u,\eta)$，$i=0,1$，$n\geqslant 1$ 分别如定理 3 及定义 9 定义，$\{S(t):t\geqslant 0\}$，$\{S_i^{(n)}(t):t\geqslant 0\}$ 分别是与 $c(u,\eta)$，$c_i^{(n)}(u,\eta)$ 相应的过程，则

(i) $\exists\bar{\nu}_i^{(n)}\in\mathscr{I}(c_i^{(n)}(\cdot,\cdot))\subset\mathscr{P}(X)$ 使 $\nu_iS_i^{(n)}(t)\Longrightarrow\bar{\nu}_i^{(n)}$，$i=0,1$，$t\to\infty$；

(ii) $\bar{\nu}_0^{(n)}\leqslant\bar{\nu}_0^{(n+1)}$，$\bar{\nu}_0^{(n+1)}\leqslant\bar{\nu}_0$，$\bar{\nu}_1\leqslant\bar{\nu}_1^{(n+1)}$，$\bar{\nu}_1^{(n+1)}\leqslant\bar{\nu}_1^{(n)}$，$n\geqslant 1$；

(iii) $\bar{\nu}_i^{(n)}\Longrightarrow\bar{\nu}_i$，$i=0,1$，$n\to\infty$。

从而有

(iv) 与 $c(u,\eta)$ 相应的过程遍历的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\nu}_0^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\bar{\nu}_1^{(n)} \tag{12.1}$$

上式中的极限为测度弱收敛极限。

证. 由引理 10 知 $\{S_i^{(n)}(t):\ t\geqslant 0\}$ 存在且由引理 11 知它吸引，故由定理 3 知 (i) 成立。其次由引理 11 知 $c_0^{(n)}(u,\eta)$，$c_0^{(n+1)}(u,\eta)$ 满足(2.4.3)的条件，故由定理 2.9 知

$$\bar{\nu}_0^{(n)}\leqslant\bar{\nu}_0^{(n+1)}.$$

同理分别考虑 $c_0^{(n+1)}(u,\eta)$ 与 $c(u,\eta)$，$c(u,\eta)$ 与 $c_1^{(n+1)}(u,\eta)$，$c_1^{(n+1)}(u,\eta)$ 与 $c_1^{(n)}(u,\eta)$，应用引理 11 及定理 2.9 即知(ii)成立。$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，令 $A_\Lambda\triangleq\{\eta\in X:\eta(u)=1,u\in\Lambda\}$，则由 (ii) 知

$$\bar{\nu}_0^{(n)}(A_\Lambda)\leqslant\bar{\nu}_0^{(n+1)}(A_\Lambda)\leqslant\bar{\nu}_0(A_\Lambda)\leqslant\bar{\nu}_1(A_\Lambda) \tag{12.2}$$

$$\leqslant \bar{\nu}_1^{(n+1)}(A_\Lambda) \leqslant \bar{\nu}_1^{(n)}(A_\Lambda)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_0^{(n)}(A_\Lambda), \quad \lim_{n\to\infty} \bar{\nu}_1^{(n)}(A_\Lambda)$$

存在，因而由附录引理 3.9 知$\exists \underline{\nu}, \bar{\nu} \in \mathscr{P}(X)$ 使

(12.3) $\qquad \bar{\nu}_0^{(n)} \Longrightarrow \underline{\nu}, \qquad \bar{\nu}_1^{(n)} \Longrightarrow \bar{\nu}.$

由(12.2)及(12.3)得

(12.4) $\qquad \forall \Lambda \in \mathscr{S}, \ \underline{\nu}(A_\Lambda) \leqslant \bar{\nu}_0(A_\Lambda) \leqslant \bar{\nu}_1(A_\Lambda) \leqslant \bar{\nu}(A_\Lambda).$

另一方面，由于 $\bar{\nu}_i^{(n)} \in \mathscr{I}(c_i^{(n)}(\cdot, \cdot))$，故由命题 1.4.2 知 $\forall f \in \mathscr{D}(X)$,

$$\left|\int \Omega f d\underline{\nu}\right| \leqslant \left|\int \Omega f d\underline{\nu} - \int \Omega f d\bar{\nu}_0^{(n)}\right|$$

$$+ \left|\int (\Omega f - \Omega_i^{(n)} f) d\bar{\nu}_0^{(n)}\right|$$

令 $n \to \infty$，由(10.2)及(12.3)立即可知上式右端趋于 0，因而

$$\int \Omega f d\underline{\nu} = 0,$$

由命题 1.4.2 知 $\underline{\nu} \in \mathscr{I}(c(\cdot,\cdot))$. 于是由定理 3(v) 知 $\bar{\nu}_0 \leqslant \underline{\nu}$. 因而由命题 2.7 知 $\forall \in \mathscr{S}$，$\bar{\nu}_0(A_\Lambda) \leqslant \underline{\nu}(A_\Lambda)$，再由命题 2.7(ii) 知 $\bar{\nu}_0 = \underline{\nu}$. 同法可证 $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}$. 故 (iii) 获证。由 (iii) 及定理 4 知 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 遍历当且仅当(12.1)成立。□

最后讨论平移不变的情形。

13. 定义 设 $S = Z^d$，$d \geqslant 1$. $\forall u \in S$，定义 T_u: $Z^d \to Z^d$ 如下:

(13.1) $\qquad T_u(v) \triangleq v + u, \quad v \in Z^d.$

以下称 T_u 是 Z^d 的一个**平移变换**. $\forall u$，$v \in Z^d$，定义 T_u，T_v 的乘法如下:

(13.2) $\qquad T_u \cdot T_v: (T_u \cdot T_v)(w) = T_u(T_v(w)) = w + v + u,$
$\qquad w \in Z^d.$

记 Z^d 的恒等变换为 I，由(13.1)，(13.2)显然有

(13.3) $\qquad T_0 = I,\ \ T_u \cdot T_v = T_v \cdot T_u = T_{u+v},\ \ u,\ v \in Z^d.$

即 $\{T_u: u \in Z^d\}$ 对 (13.2) 定义的乘法作成一个可换群，T_u 的逆 $T_u^{-1} = T_{-u},\ u \in Z^d$. $\forall u \in Z^d$，由 T_u 可诱导出 $X = \{0,\ 1\}^{Z^d}$ 上的一个变换 $T_u: X \to X$ 如下：

(13.4) $\qquad \forall \eta \in X,\ \ T_u(\eta)(v) \triangleq \eta(T_u^{-1}(v)) = \eta(v-u),\ \ v \in Z^d,$

即 $T_u(\eta) = \eta \circ T_u^{-1}$. 则 T_u 是 X 到 X 上的一一映射(即 X 上的双射)。于是 $\{T_u: u \in Z^d\}$ 作为 X 上的变换集仍然满足(13.3)，因为

$$(T_u \cdot T_v)(\eta) = \eta \circ (T_u \cdot T_v)^{-1} = \eta \circ T_{u+v}^{-1} = T_{u+v}(\eta).$$

再 $\forall \mu \in \mathscr{P}(X), u \in Z^d$，定义 $T_u\mu \triangleq \mu \circ T_u^{-1}$ 而

(13.5) $\qquad \forall F \in \mathscr{F},\ \ (T_u\mu)(F) \triangleq \mu(T_u^{-1}(F)),$

而称

(13.6) $\qquad \mathscr{P}_0(X) = \{\mu \in \mathscr{P}(X): T_u\mu = \mu,\ u \in Z^d\}$

的元为 X 上的 **Z^d 平移不变概率**. 由 $T_u,\ u \in Z^d$ 还可诱导出 $c(v,\eta)$ 的变换及 Z^d 平移不变的概念如下：

(13.7) $\qquad T_u c(v,\eta) \triangleq c(T_u^{-1}(v), T_u^{-1}(\eta)),\ \ v \in Z^d,\ \ \eta \in X.$

若 $c(v,\eta)$ $\forall u \in Z^d$ 都满足

(13.8) $\qquad \forall v \in Z^d,\ \eta \in X,\ \ T_u c(v,\eta) = c(v,\eta),$

则称速度函数 **Z^d 平移不变.**

14. 解释及例 上面的定义是很形式的，这样做对数学严格性是有好处的。另一方面这些定义有很直观的背景，而且有实际意义，下面对此作些解释并举例说明。从实际来说，Z^d、$\eta \in \{0,\ 1\}^{Z^d}$ 分别是晶体的粒子位置及粒子系统的组态的抽象，但是随着这种抽象却使晶体固定在 Z^d 的坐标上，而晶体本身应该是不随 Z^d 的坐标的选择改变的。为了克服这个矛盾，引进 Z_d 的平移变换 T_u，于是晶体的位置集有了新的表示，而在新的位置集表示下，晶体的组态的新表示就应该是 $T_u(\eta) = \eta \circ T_u^{-1}$. 同样作为晶体的组态的改变(概率)速度 $c(u,\eta)$ 也应不随位置集表示的改变而改变，而

它在位置的新表示下应该是由 (13.7) 来规定的，所以速度函数 $c(u,\eta)$ Z^d 平移不变的定义就是根据这个要求给出的。至于 $T_u\mu$ 的定义 (13.5) 则是为了与随机变量(元) 的分布的一致而引入的.

按照基本接触模型及紧邻伊辛模型的直观背景，它们的速度函数应该是 Z^d 平移不变的，作为例子，我们来加以验证。

例 (i) 紧邻伊辛模型的速度函数

$$c(u,\eta) = \exp\left\{-\beta \sum_{v:|v-u|=1} (2\eta(u)-1)(2\eta(v)-1)\right\}$$

Z^d 平移不变，事实上，$\forall u,\ v\in Z^d,\ \eta\in X$ 有

$$\begin{aligned}
T_u c(v,\eta) &= c(v-u, T_u^{-1}(\eta)) \\
&= \exp\left\{-\beta \sum_{w:|w-v+u|=1} (2\eta(T_u(v-u)) \right.\\
&\qquad \left. -1)(2\eta(T_u(w))-1)\right\} \\
&= \exp\left\{-\beta \sum_{w:|w+u-v|=1} (2\eta(v)-1)(2\eta(w+u)-1)\right\} \\
&= c(v,\eta)
\end{aligned}$$

故紧邻伊辛模型 Z^d 平移不变。至于一般的伊辛模型，则当 $S=Z^d$，交互作用势 Φ 为 Z^d 平移不变，即 $\forall A\in\mathscr{S}\setminus\{\phi\}$，$\Phi(A+u)=\Phi(T_u(A))=\Phi(A)$ 对任何 $u\in Z^d$ 成立 (其中 $A+u\triangleq\{v+u: v\in A\}=T_u(A)$) 时，伊辛模型 Z^d 平移不变。读者可自行验证。

例 (ii). 设例 2(a) 中的 $S=Z^d$，$\lambda\geqslant 0$，$p(u,v)=p(v-u)$，则由(2.2.1)定义的接触模型的速度函数是 Z^d 平移不变的。事实上，$\forall u,v\in Z^d$，$\eta\in X$，

$$\begin{aligned}
T_u c(v,\eta) &= c(v-u, T_u^{-1}(\eta)) \\
&= \begin{cases} 1, & (T_u^{-1}\eta)(v-u)=1, \\ \lambda \sum_w p(w-(v-u))(T_u^{-1}\eta)(w), & (T_u^{-1}\eta)(v-u)=0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$=\left.\begin{cases}1, & \eta(v)=1,\\ \lambda\sum\limits_{w}p(w-v)\eta(w), & \eta(v)=0,\end{cases}\right\}=c(u,\eta).$$

因而基本接触模型的速度函数是 Z^d 平移不变的。

例 (iii) 设例 2(c) 中的 $S=Z^d$, $p(u,v)=p(v-u)$, 则由(2.2.2)定义的选举模型的速度函数是 Z^d 平移不变的。读者可自行验证。

15. 引理 若 $c(u,\eta)$, $u\in Z^d$, $\eta\in X$ 是 Z^d 平移不变的，则 $\forall u, v\in Z^d$, 有

(15.1) $\quad \forall w\in Z^d,\ \eta(u+w)=\zeta(v+w)\Longrightarrow c(u,\eta)$
$$=c(v,\zeta).$$

反之，若 $\forall v\in Z^d$ 有

(15.2) $\quad \forall w\in Z^d,\ \eta(w)=\zeta(v+w)\Longrightarrow c(0,\eta)=c(v,\zeta),$

则 $c(u,\eta)$, $u\in Z^d$, $\eta\in X$ 是 Z^d 平移不变的。

证. 设 $c(u,\eta)$ 是 Z^d 平移不变的，则 $\forall u, v\in Z^d$,

$$c(u,\eta)=T_{u-v}c(u,\eta)=c(T_{u-v}^{-1}(u),\ T_{u-v}^{-1}(\eta))$$
$$=c(v,T_{u-v}^{-1}(\eta)).$$

而"$\forall w\in Z^d$, $\eta(u+w)=\zeta(v+w)$" 即 $T_{u-v}^{-1}(\eta)=\zeta$, 因而(15.1)成立。反之，设 $\forall v\in Z^d$, (15.2) 成立，易见(15.2)等价于 $c(v,\zeta)=c(0,T_v^{-1}\zeta)$, 于是 $\forall u,v\in Z^d$, $\eta\in X$,

$$T_uc(v,\eta)=c(v-u,\ T_u^{-1}\eta)=c(0,T_{v-u}^{-1}(T_u^{-1}\eta))$$
$$=c(0,\ T_v^{-1}\eta)=c(v,\eta).$$

故 $c(v,\eta)$, $v\in Z^d$, $\eta\in X$, 是 Z^d 平移不变的。□

16. 定理 设 $c(u,\eta),u\in Z^d,\eta\in X$ 是 Z^d 平移不变且吸引的自旋速度函数。若 $\mathscr{I}\cap\mathscr{P}_0(X)$ 为单元集，则 $\mathscr{I}$ 亦然，因而过程遍历。

证. 1° 首先注意：若能证明

(16.1) $\quad \forall t\geqslant 0,\ i=0,1,\quad \nu_iS(t)\in\mathscr{P}_0(X),$

则定理获证，事实上若(16.1)成立，则 $\forall t\geqslant 0$，$\forall F$ 为柱集，$\forall u\in Z^d$ 有

$$\nu_i S(t)(F)=\nu_i S(t)(T_u^{-1}(F)),$$

而 $T_u^{-1}(F)$ 仍为柱集，故在上式中令 $t\to\infty$ 即得

$$\bar{\nu}_i(F)=\bar{\nu}_i(T_u^{-1}(F))=(T_u\bar{\nu}_i)(F),\quad i=0,\ 1,\ u\in Z^d$$

由单调类定理即知上式 $\forall F\in\mathscr{F}$ 成立。故 $\bar{\nu}_i=T_u\bar{\nu}_i$，$u\in Z^d$，$i=0,\ 1$，即 $\bar{\nu}_i\in\mathscr{P}_0(X)$，从而 $\bar{\nu}_i\in\mathscr{I}\cap\mathscr{P}_0(X)$。于是若 $\mathscr{I}\cap\mathscr{P}_0(X)$ 为单元集，则 $\bar{\nu}_0=\bar{\nu}_1$，从而由定理4知 $\mathscr{I}$ 为单元集，过程遍历。

2° 为了证明(16.1)，先证明

(16.2) $\quad\forall u\in Z^d$，$f\in C_b(X)$，$S(t)f\circ T_u=S(t)(f\circ T_u)$。

为此先证明

(16.3) $\quad\forall u\in Z^d$，$f\in\mathscr{D}(X)$，$\Omega f\circ T_u=\Omega(f\circ T_u)$。

容易验证：$\forall u$，$v\in Z^d$，$\eta\in X$，$T_u({}_v\eta)={}_{u+v}(T_u\eta)$。于是

$$\begin{aligned}\Omega(f\circ T_u)(\eta)&=\sum_v c(v,\eta)[f(T_u({}_v\eta))-f(T_u(\eta))]\\&=\sum_v T_u^{-1}c(v,\eta)[f({}_{u+v}(T_u\eta))-f(T_u(\eta))]\\&=\sum_v c(u+v,T_u\eta)[f({}_{u+v}(T_u\eta))-f(T_u\eta)]\\&=\sum_v c(v,T_u\eta)[f({}_v(T_u\eta))-f(T_u\eta)]\\&=(\Omega f)(T_u\eta)=(\Omega f\circ T_u)(\eta)\end{aligned}$$

进而由 $\bar{\Omega}$ 的定义有

(16.4) $\quad\forall u\in Z^d$，$f\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$，$(\bar{\Omega}f)\circ T_u=\bar{\Omega}(f\circ T_u)$。

由于 $\forall\lambda>0$ 充分小，$(I-\lambda\bar{\Omega})^{-1}$ 存在，于是按照多次用过的手法得知 $\forall t\geqslant 0$，$n\geqslant 1$ 充分大，$f\in C_b(X)$ 有

$$\left[\left(I-\frac{t}{n}\Omega\right)^{-n}f\right]\circ T_u=\left(I-\frac{t}{n}\Omega\right)^{-n}(f\circ T_u).$$

令 $n\to\infty$，即得(16.2)。

3° 最后证明(16.1)。事实上由单调类定理知 $\nu_i S(t)\in\mathscr{P}_0(X)$ 等价于 $\forall F\in\mathscr{F}$ 柱集，$u\in Z^d$

$$\nu_i S(t)(F)=\nu_i S(t)(T_u^{-1}(F)).$$

但当 F 为柱集时，$I_F\in C_b(X)$，于是由(16.2)知

$$\begin{aligned}
\nu_i S(t)(F)&=\int I_F d\nu_i S(t)=\int S(t)I_F d\nu_i\\
&=\begin{cases}(S(t)I_F)(\theta), & i=0,\\ (S(t)I_F)(1), & i=1\end{cases}\\
&=\begin{cases}S(t)I_F(T_u(\theta)), & i=0\\ S(t)I_F(T_u(1)), & i=1\end{cases}\\
&=\begin{cases}(S(t)(I_F\circ T_u))(\theta), & i=0,\\ (S(t)(I_F\circ T_u))(1), & i=1\end{cases}\\
&=\int S(t)(I_F\circ T_u)d\nu_i=\int(I_F\circ T_u)d(\nu_i S(t))\\
&=\nu_i S(t)(\{\eta:T_u\eta\in F\})=\nu_i S(t)(T_u^{-1}(F)).
\end{aligned}$$

故(16.1)成立，因而定理获证。□

§4 有势自旋变相过程与伊辛模型的相变

本节将应用上一节结果首先讨论当自旋变相过程的速度函数是吸引而且有势（交互作用势为取非负值的对势的伊辛模型便满足此要求）时，遍历性与 Gibbs 态唯一的关系，进一步讨论伊辛模型的相变的一些问题。

1. 定理 设正速度函数 $c(u,\eta)$ 有势而且吸引，$c(u,\cdot)$，

$u \in S$，连续、一致有界且变差一致可和．$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，定义

$$(1.1)\begin{cases} c_i^{(\Lambda)}(u,\eta) \triangleq \begin{cases} c(u,\eta i), & u \in \Lambda, \\ 0, & u \notin \Lambda,\ \eta(u) = i,\ i = 0,1 \\ M(u), & u \notin \Lambda,\ \eta(u) \neq i, \end{cases} \\ \eta^i(u) \triangleq \begin{cases} \eta(u), & u \in \Lambda, \\ i, & u \notin \Lambda, \end{cases} \quad u \in S,\ M(u) = \sup\limits_{\eta} c(u,\eta). \end{cases}$$

与 $c_i^{(\Lambda)}(u,\eta)$ 相应的马尔可夫半群记作 $\{S_i^{(\Lambda)}(t): t \geqslant 0\}$，则

(1.2) $\quad \nu_0 S_0^{(\Lambda)}(t) \Rightarrow \mu_{\Lambda,\theta}, \quad \nu_1 S_1^{(\Lambda)}(t) \Rightarrow \mu_{\Lambda,1} \quad (t \to \infty)$

其中 $\mu_{\Lambda,\theta}$, $\mu_{\Lambda,1}$ 如定义 2.3.3.

(1.3) $\quad \bar{\nu}_i \in \mathscr{G}(V)\ \ i = 0,1$，从而 $\forall \mu \in \mathscr{G}(V)$，$\bar{\nu}_0 \leqslant \mu$，$\mu \leqslant \bar{\nu}_1$.

(1.4) $\quad |\mathscr{G}(V)| = 1 \Longleftrightarrow \bar{\nu}_0 = \bar{\nu}_1 \Longleftrightarrow$ 过程遍历.

此处的 $\mathscr{G}(v)$ 即第二章的 $\mathscr{G}_s(V)$.

证 (i) 设 $V(\eta)$，$\eta \in X$，是 $c(u,\eta)$ 的一个势，则由定义 2.3.3 及定义 2.1.8 知 $\forall \zeta \in X(S \backslash \Lambda)$，

$$\mu_{\Lambda,\zeta}(F) = \sum_{\xi \in F(\zeta)} \exp\{V(\xi \times \zeta)\} K^{-1}(\Lambda,\zeta), \quad F \in \mathscr{F},$$

其中

$$K(\Lambda,\zeta) = \sum_{w \in X(\Lambda)} \exp\{V(w \times \zeta)\}.$$

于是 $\forall f \in C_b(X)$，当 $u \in \Lambda$ 时，

$$\begin{aligned} &\int c_0^{(\Lambda)}(u,\eta)[f({}_u\eta) - f(\eta)]\mu_{\Lambda,\theta}(d\eta) \\ (1.5) \quad &= \sum_{\xi \in X(\Lambda)} c_0^{(\Lambda)}(u,\xi \times \theta)[f(({}_u\xi) \times \theta) \\ &\quad - f(\xi \times \theta)]\mu_{\Lambda,\theta}(\xi \times \theta) \\ &= \sum_{\xi \in X(\Lambda)} c(u,\xi \times \theta)\exp\{V(\xi \times \theta)\}[f(({}_u\xi) \times \theta) \end{aligned}$$

$$-f(\xi\times\theta)]\cdot K^{-1}(\Lambda,\theta)=0$$

其中最后一步用到 $V(\eta)$ 是 $c(u,\eta)$ 的势即

$$c(u,\xi\times\theta)\exp V(\xi\times\theta)=c(u,{}_u\xi\times\theta)\exp V({}_u\xi\times\theta).$$

当 $u\in\Lambda$ 时，由(1.1)知 $c_0^{(\Lambda)}(u,\ \xi\times\theta)=0,\ \forall\xi\in X(\Lambda)$，于是由(1.5)的第一步计算知

$$(1.6)\qquad \int c_0^{(\Lambda)}(u,\eta)[f({}_u\eta)-f(\eta)]\mu_{\Lambda,\theta}(d\eta)=0$$

由(1.5)知(1.6) $\forall u\in S$ 成立，由命题 2.1.6 知 $\mu_{\Lambda,\theta}$ 是关于 $c_0^{(\Lambda)}(u,\eta)$ 的可逆测度，因而是关于 $c_0^{(\Lambda)}(u,\eta)$ 的不变测度(注2.1.2)，即

$$(1.7)\qquad \mu_{\Lambda,\theta}S_0^{(\Lambda)}(t)=\mu_{\Lambda,\theta}.$$

为了证明(1.2)的第一式，先证明：$S_0^{(\Lambda)}(t)$ 限于 $X(\Lambda)\times\{\theta\}$ 是一个以 $X(\Lambda)\times\{\theta\}$ 为状态空间的不可约马链．具体地说，定义 $X(\Lambda)\times\{\theta\}$ 上的 Q 矩阵

$$Q_0^{(\Lambda)}=(q_0^{(\Lambda)}(\eta\times\theta,\ \xi\times\theta):\eta,\zeta\in X(\Lambda))$$

如下：

$$\begin{cases} q_0^{(\Lambda)}(\eta\times\theta,\xi\times\theta)\triangleq\begin{cases}c_0^{(\Lambda)}(u,\eta\times\theta), & \xi={}_u\eta,\ u\in\Lambda,\\ 0, & \text{其它 } \xi\neq\eta,\ \xi,\eta\in X(\Lambda)\end{cases}\\ q_0^{(\Lambda)}(\eta\times\theta,\eta\times\theta)\triangleq-\sum\limits_{u\in\Lambda}c_0^{(\Lambda)}(u,\eta\times\theta).\end{cases}$$

显然 $Q_0^{(\Lambda)}$ 是一不可约保守 Q 矩阵，设它所决定的(唯一)马链的转移函数为 $p_0^{(\Lambda)}(t,\ \eta\times\theta,\ \xi\times\theta)$，$t\geqslant 0,\eta,\ \xi\in X(\Lambda)$，则可证：$\forall f\in C_b(X)$ 有

$$(1.8)\qquad S_0^{(\Lambda)}(t)f(\eta\times\theta)=\sum_{\xi\in X(\Lambda)}p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)f(\xi\times\theta)$$

事实上，$\forall f\in C_b(X)$，$\eta\in X(\Lambda)$，由(1.1)知

$$\Omega_0^{(\Lambda)}f(\eta\times\theta)=\sum_{u\in S}c_0^{(\Lambda)}(u,\ \eta\times\theta)[f({}_u(\eta\times\theta))$$

$$-f(\eta\times\theta)]$$

$$-\sum_{u\in\Lambda} q_0^{(\Lambda)}(\eta\times\theta,{}_u\eta\times\theta)[f(u(\eta\times\theta))-f(\eta\times\theta)]$$

$$=(Q_0^{(\Lambda)}f(\cdot\times\theta))(\eta)$$

于是 $\forall t\geqslant 0$，有

$$\frac{dS_0^{(\Lambda)}(t)f}{dt}(\eta\times\theta)=(Q_0^{(\Lambda)}S_0^{(\Lambda)}(t)f)(\eta\times\theta)$$

$$=(Q_0^{(\Lambda)}(S_0^{(\Lambda)}(t)f)(\cdot\times\theta))(\eta)$$

又由 $p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)$ 满足向后方程知

$$\frac{d\left[\sum_{\xi\in X(\Lambda)} p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)f(\xi\times\theta)\right]}{dt}$$

$$=Q_0^{(\Lambda)}\Big(\sum_{\xi\in X(\Lambda)} p_0^{(\Lambda)}(t,(\cdot)\times\theta,\xi$$

$$\times\theta)f(\xi\times\theta)\Big)(\eta)$$

故由 $Q_0^{(\Lambda)}$-过程的唯一性知(1.8)成立.

今由(1.8)往证(1.2)成立. 由 $\mu_{\Lambda,\theta}$ 限于 $X(\Lambda)\times\{\theta\}$是一概率测度及(1.7)易知 $\mu_{\Lambda,\theta}(\{\eta\times\theta\})$，$\eta\in X(\Lambda)$，是 $p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)$ 的不变测度,这是因为 $\forall f\in C_b(X)$，$t\geqslant 0$ 有

$$\sum_{\xi\in X(\Lambda)} f(\xi\times\theta)\mu_{\Lambda,\theta}(\{\xi\times\theta\})$$

$$=\int f d\mu_{\Lambda,\theta}\overset{(1.7)}{=\!=}\int S_0^{(\Lambda)}(t)f d\mu_{\Lambda,\theta}$$

$$=\sum_{\eta\in X(\Lambda)}(S_0^{(\Lambda)}(t)f)(\eta\times\theta)\mu_{\Lambda,\theta}(\{\eta\times\theta\})$$

$$\overset{(1.8)}{=\!=}\sum_{\xi\in X(\Lambda)} f(\xi\times\theta)$$

$$\cdot\left[\sum_{\eta\in X(\Lambda)}\mu_{\Lambda,\theta}(\{\eta\times\theta\})p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)\right],$$

而 $p_0^{(\Lambda)}(t,\eta\times\theta,\xi\times\theta)$ 是有限状态的不可约马链，因而遍历，故

$$p^{(\Lambda)}(t, \eta \times \theta, \xi \times \theta) \xrightarrow{t \to \infty} \mu_{\Lambda,\theta}(\{\xi \times \theta\}), \ \forall \eta, \ \xi \in X(\Lambda),$$

于是 $\forall f \in C_b(X)$

$$\begin{aligned}\int f d\nu_0 S_0^{(\Lambda)}(t) &= S_0^{(\Lambda)}(t) f(\theta) \\ &\overset{(1.8)}{=} \sum_{\xi \in X(\Lambda)} p_0^{(\Lambda)}(t, \theta, \xi \times \theta) f(\xi \times \theta) \\ &\longrightarrow \sum_{\xi \in X(\Lambda)} f(\xi \times \theta) \mu_{\Lambda,\theta}(\{\xi \times \theta\}) \\ &= \int f d\mu_{\Lambda,\theta},\end{aligned}$$

故(1.2)的第一式获证．同法可证(1.2)的第二式．

(ii) 任取 $\{\Lambda_n\} \subset \mathscr{S}$, $\Lambda_n \uparrow S$, $c_i^{(\Lambda_n)}(u, \eta)$, $S_i^{(\Lambda_n)}(t)$ 分别是定理 3.12 中的 $c_i^{(n)}(u,\eta)$, $S_i^{(n)}(t)$. 于是由(1.2)知

(1.9) $\qquad \mu_{\Lambda_n,\theta} = \bar{\nu}_0^{(n)}, \quad \mu_{\Lambda_n,1} = \bar{\nu}_1^{(n)},$

由此及定理 3.12(iii) 知

(1.10) $\qquad \mu_{\Lambda_n,\theta} \Rightarrow \bar{\nu}_0, \quad \mu_{\Lambda_n,1} \Rightarrow \bar{\nu}_1, (n \to \infty)$

再由定义 2.3.3 及定理 2.3.4 知 $\bar{\nu}_i \in \mathscr{G}_s = \mathscr{G}(V)$. 由于 $\mathscr{G}(V) = \mathscr{R}(\bar{\Omega}) \subset \mathscr{I}(\bar{\Omega})$ (定理 2.3.7),从而由定理 3.3 (iv) 知 $\forall \mu \in \mathscr{G}(V)$ 有 $\bar{\nu}_0 \leqslant \mu$ 及 $\mu \leqslant \bar{\nu}_1$. 最后由(1.3)及定理3.4知(1.4)成立. □

2. 推论 (i) 设 $c_i(u, \eta)$, $i = 1, 2$, 是有相同势的速度函数,则它们的 Gibbs 态集相同．进一步设它们都是吸引的且相应的自旋变相过程存在,则它们同时遍历或同时非遍历.

(ii) 设 $c(u,\eta)$ 为有势速度函数,则

$$c_1(u, \eta) \triangleq \frac{c(u,\eta)}{c(u,\eta) + c(u, {}_u\eta)}$$

与 $c(u, \eta)$ 有相同的势，从而它们有相同的 Gibbs 态集．进一步,若 $c(u,\eta)$ 为吸引的且相应的自旋变相过程存在,还有

$$l \triangleq \inf\{c(u, \eta): u \in S, \ \eta \in X\} > 0,$$

则它们同时遍历或同时非遍历.

证. (i) 由定理 1 立刻推出. 今往证 (ii). 若 $c(u, \eta)$ 有势 V, 则 $c(u, \eta)$ 为正速度函数,从而 $c_1(u, \eta)$ 也是正速度函数,且 $\forall u \in S, \ \eta \in X$,

$$\frac{c_1(u,\eta)}{c_1(u,{}_u\eta)} = \frac{c(u,\eta)}{c(u,{}_u\eta)} = \frac{\exp V({}_u\eta)}{\exp V(\eta)}.$$

故 $c(u,\eta)$ 与 $c_1(u,\eta)$ 有相同的势,因而它们有相同的 Gibbs 态集. 若 $c(u, \eta)$ 吸引,则 $\forall \eta_1, \eta_2 \in X, \ \eta_1 \leqslant \eta_2$, 当 $\eta_1(u)=\eta_2(u)=0$ 时,

$$c(u, \eta_1) \leqslant c(u, \eta_2), \quad c(u, {}_u(\eta_1)) \geqslant c(u, {}_u(\eta_2)),$$

因而

$$\begin{aligned} c_1(u, \eta) &= \left[1 + \frac{c(u, {}_u(\eta_1))}{c(u, \eta_1)}\right]^{-1} \\ &\leqslant \left[1 + \frac{c(u, {}_u(\eta_2))}{c(u,\eta_2)}\right]^{-1} = c_1(u, \eta_2) \end{aligned}$$

同法可证当 $\eta_1(u) = \eta_2(u) = 1$ 时,

$$c_1(u, \eta_1) \geqslant c_1(u, \eta_2).$$

故 $c_1(u, \eta)$ 吸引, 还有若 $c(u, \cdot), u \in S$, 是一致有界连续函数,则 $c_1(u, \cdot), u \in S$, 亦然. 若 $c(u, \cdot), u \in S$ 的变差一致可和,则易证(仿推论 1.2.13 的证法) $\forall \omega \in S$,

$$\Delta_{c_1(u,\cdot)}(\omega) \leqslant l^{-1} \Delta_{c(u,\cdot)}(\omega),$$

因而 $c_1(u, \cdot), u \in S$, 的变差一致可和, 它相应的自旋变相过程存在. 故由 (i) 知与 $c(u, \eta)$、$c_1(u, \eta)$ 相应的自旋变相过程同时遍历或同时非遍历.

3. 推论 设 Φ 为伊辛模型的交互作用势,则

$$(3.1) \qquad c_1(u, \eta) = \exp\left\{-\beta \sum_{A \ni u} \Phi(A) \chi_A(\eta)\right\},$$

$$(3.2) \qquad c_2(u, \eta) = \left[\exp\left\{2\beta \sum_{A \ni u} \Phi(A) \chi_A(\eta)\right\} + 1\right]^{-1}$$

有相同的 Gibbs 态集. 此处及以下改记作 $\mathscr{G}(\Phi)$ 若进一步设 Φ 为取非负值的对势且

$$\text{(3.3)} \qquad \sup_{u} \sum_{A \ni u} |\Phi(A)| \cdot |A| < \infty$$

则与 $c_i(u, \eta)$, $i = 1, 2$, 相应的自旋变相过程存在,它们同时遍历或同时非遍历.

证. 因为 $c_2(u, \eta) = c_1(u, \eta)[c_1(u, \eta) + c_1(u, {}_u\eta)]^{-1}$, 所以由推论 2(ii) 知 $c_1(u, \eta)$, $c_2(u, \eta)$有相同的 Gibbs 态集,其次若Φ为取非负值对势且满足(3.3),则 $c_1(u, \eta)$ 为吸引速度函数,且与它相应的自旋变相过程存在. 其次

$$\inf\{c_1(u, \eta): u \in S, \eta \in X\}$$
$$\geqslant \exp\left\{-\beta \sup_{u} \sum_{A \ni u} |\Phi(A)| \cdot |A|\right\} > 0.$$

故由推论 2(ii) 知与 $c_i(u, \eta)$, $i = 1, 2$ 相应的自旋过程同时遍历或同时非遍历. □

下面讨论伊辛模型的相变问题. 先给出 Gibbs 态唯一的一个充分条件. 它是迄今最初等而且可以应用的最一般充分条件,是属于 Dobrushin 的.

4. 定理 设 $\Phi = \{\Phi(A): A \in \mathscr{S}, A \neq \phi\}$ 是伊辛模型的交互作用势,如果满足下列两条件之一:

$$\text{(4.1)} \qquad \sup_{u} \sum_{v \neq u} \sup_{\eta} |\rho_u(\eta) - \rho_u({}_v\eta)| < 1,$$

其中

$$\rho_u(\eta) \triangleq \left[1 + \exp\left\{2 \sum_{A \ni u} \Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}\right]^{-1}; \text{ 或}$$

$$\text{(4.2)} \qquad \sup_{u} \sum_{A \ni u} (|A| - 1)|\Phi(A)| < 4^{-1} \log 2,$$

则 $|\mathscr{G}(\Phi)| = 1$.

特别,若Φ满足(3.3),则当β充分小时 $|\mathscr{G}(\beta\Phi)| = 1$.

证 由推论 3 只需考虑由

$$c(u,\eta)\triangleq\rho_u(\eta),\quad u\in S,\eta\in X$$

给出的速度函数即可。此时 $c(u,\cdot)$, $u\in S$, 显然是一致有界(以 1 为界)的连续函数族，而 (5.1) 即表示它们的变差一致可和，现在应用定理 1.4.5 证明相应的自旋变相过程遍历(采用该定理的符号)。此时由 $\chi_A(\eta)=-\chi_A({}_u\eta)$, $u\in A$, 知

$$\varepsilon=\inf\{c(u,\eta)+c(u,{}_u\eta);u\in S,\ \eta\in X\}=1,$$

$$M=\sup_u\sum_{v\neq u}\Delta_{c(u,\cdot)}(v)$$

$$=\sup_u\sum_{v\neq u}\sup_\eta|\rho_u(\eta)-\rho_u({}_v\eta)|$$

于是由 (4.1) $M<\varepsilon$, 过程遍历。再由 (2.1.2.1), (2.3.7.1), (2.3.5.1) 及推论 3 知 $\mathscr{I}(c(\cdot,\cdot))\supset\mathscr{R}(c(\cdot,\cdot))=\mathscr{G}(\Phi)$, 从而 $|\mathscr{G}(\Phi)|=1$.

今往证: (4.2) ⇒ (4.1). 由

$$\chi_A({}_v\eta)=\begin{cases}-\chi_A(\eta), & v\in A,\\ \chi_A(\eta), & v\notin A,\end{cases}\tag{4.3}$$

知当 $v\neq u$ 时, $\forall\eta\in X$ 有

$$\rho_u(\eta)-\rho_u({}_v\eta)$$

$$=\frac{\exp\left\{2\sum\limits_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}\left(\exp\left\{-4\sum\limits_{A\ni u,v}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}-1\right)}{\left(1+\exp\left\{2\sum\limits_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}\right)\left(1+\exp\left\{2\sum\limits_{A\ni u}\Phi(A)\chi_A({}_v\eta)\right\}\right)}$$

于是当 $v\neq u$ 时,

$$\sup_\eta|\rho_u(\eta)-\rho_u({}_v\eta)|\leqslant\exp\left\{4\sum_{A\ni u,v}|\Phi(A)|\right\}-1.\tag{4.4}$$

又对任何非负序列 $\{a_n\}$ 来说，有不等式

$$e^{\sum_n a_n} = \prod_n [1 + (e^{a_n} - 1)]$$

$$\geqslant 1 + \sum_n (e^{a_n} - 1),$$

于是由 (4.4)

$$\sum_{v \neq u} \sup_\eta |\rho_u(\eta) - \rho_u({}_v\eta)|$$

$$\leqslant \exp\left\{4 \sum_{v \neq u} \sum_{A \ni u, v} |\Phi(A)|\right\} - 1.$$

$$= \exp\left\{4 \sum_{A \ni u} (|A| - 1)|\Phi(A)|\right\} - 1.$$

故由(4.2)导出(4.1)。

最后，若Φ满足 (3.3)，则当

$$\beta < \left(4 \sup_u \sum_{A \ni u} |A||\Phi(A)|\right)^{-1} \log 2.$$

时，

$$\sup_u \sum_{A \ni u} (|A| - 1)|\beta\Phi(A)| < 4^{-1} \log 2,$$

因而 $|\mathscr{G}(\beta\Phi)| = 1$。□

注 实际上，(i) 的结论可以稍加推广成下列结论：设 $c(u, \eta)$ 有势 V，$c(u, \cdot)$，$u \in S$，连续，且

$$\rho_u(\eta) \triangleq c(u, \eta)[c(u, \eta) + c(u, {}_u\eta)]^{-1}$$

满足(4.1)，则 $|\mathscr{G}(V)| = 1$。证法与 (i) 的证明相同，只需注意以下两点：(a) 由于 $c(u, \eta)$ 有势，$\mathscr{G}(V) \neq \phi$，(b) 在应用推论 3 处应用推论 2 .

5. 定义 设 $\{\Phi(A): A \in \mathscr{S}, A \neq \phi\}$ 是伊辛模型的交互作用势，$\forall \beta > 0$，由注 2.3.5 知它的规范 $\{\hat{J}_\beta^A: A \in \mathscr{S}\}$ 为（见 (2.3.5.1)）

$$
(5.1)\quad \begin{cases} \mu_\beta^\Lambda(\xi\times\zeta) \triangleq K_\beta(\Lambda,\ \zeta)^{-1}\exp\left\{\beta \sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi} \Phi(A)\chi_A(\xi\times\zeta)\right\}, \\ \qquad \xi\in X(\Lambda), \\ K_\beta(\Lambda,\zeta)\triangleq \sum\limits_{\omega\in X(\Lambda)} \exp\left\{\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\omega\times\zeta)\right\}, \\ \qquad \zeta\in X(S\backslash\Lambda). \end{cases}
$$

由它按定义 2.3.3 及定理 2.3.4 决定此伊辛模型相应于 β 的 Gibbs 态集 $\mathscr{G}(\beta\Phi)$（在当时记作 $\mathscr{G}(\beta V)$，V 为模型的势，现在采用此记号更易理解）。若$\exists$ $\beta_c\in(0,\infty)$ 使当 $\beta<\beta_c$ 时，$|\mathscr{G}(\beta\Phi)|=1$，当 $\beta>\beta_c$ 时，$|\mathscr{G}(\beta\Phi)|>1$，则称此伊辛模型**有相变**．若 $\beta_c=\infty$，则称**无相变**．在物理上，β 是一与温度成反比的常数．

下面证明：当 Φ 为**吸引对势**，即满足，

$$
(5.2)\quad \begin{cases} \Phi(\{u\})=H\ (\text{常数})\ u\in S,\ \Phi(A)=0,\ |A|\geqslant 3; \\ \Phi(\{u,v\})=J(u,v)=J(v,u),\ \forall u,v\in S, u\neq v; \\ J(u,v)\geqslant 0,\quad \sup\limits_u \sum\limits_{v\neq u} J(u,v)<\infty. \end{cases}
$$

且无外场（$H=0$）时，$\beta_c\in[0,\infty]$ 存在且给出 β_c 的一些性质．最后证明一维紧邻伊辛模型无相变，二维及二维以上有相变并叙述一些有关结果

为了讨论相变问题，先证明一个有用的不等式．

6.引理 设 S 有限，Φ 是取非负值的交互作用势．并设 $\nu\in\mathscr{P}(X)$ 是相应的 Gibbs 态，即 $\forall\eta\in\{0,1\}^S$，

$$
(6.1)\quad \nu(\eta)\triangleq K^{-1}\exp\left\{\sum_A \Phi(A)\chi_A(\eta)\right\},
$$

$$
K\triangleq\sum_\eta \exp\left\{\sum_A\Phi(A)\chi_A(\eta)\right\}.
$$

则

$$
(6.2)\quad \forall A\subset S,\quad \int\chi_A d\nu\geqslant 0,
$$

(6.3) $\forall A, B \subset S, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi(B)} \int \chi_A d\nu = \int \chi_A \chi_B d\nu$

$$- \int \chi_A d\nu \int \chi_B d\nu \geqslant 0.$$

证. 虽然(6.2)是(6.3)的直接推论，但是在证明(6.3)的过程中要用到(6.2)，因此我们首先证明(6.2)．按(6.1)

$$\int \chi_A d\nu = K^{-1} \sum_\eta \chi_A(\eta) \exp\left\{\sum_B \Phi(B)\chi_B(\eta)\right\}$$

$$(6.4) \qquad = K^{-1} \sum_\eta \chi_A(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{\sum_B \Phi(B)\chi_B(\eta)\right\}^n$$

$$= K^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{B_1,\cdots,B_n} \prod_{k=1}^{n} \Phi(B_k)$$

$$\cdot \sum_\eta \chi_A(\eta) \prod_{k=1}^{n} \chi_{B_k}(\eta)$$

若此式右边各项非负，则(6.2)即获证．为此只需注意到

$$(6.5) \begin{cases} \chi_A(\eta) \prod_{k=1}^{n} \chi_{B_k}(\eta) = \chi_C(\eta), \\ C \triangleq \{u \in S: u \text{ 属于 } A, B_1, \cdots, B_n \text{ 中的奇数个}\} \end{cases}$$

及 $\forall C \subset S$

$$(6.6) \sum_\eta \chi_C(\eta) = \begin{cases} 2^{|S|}, & C = \phi, \\ \prod_{u\in C} \left[\sum_{\eta(u)=0}^{1} (2\eta(u)-1)\right], \sum_{\eta(S\setminus C)} 1 = 0, & C \neq \phi, \end{cases}$$

即知 $\forall B_1, \cdots, B_n \subset S$ 都有

$$\sum_\eta \chi_A(\eta) \prod_{k=1}^{n} \chi_{B_k}(\eta) \geqslant 0.$$

故(6.2)获证．

为证(6.3)，应用K的明显式写出

$$\int \chi_A d\nu = \frac{\sum_\eta \chi_A(\eta)\exp\left\{\sum_C \Phi(C)\chi_C(\eta)\right\}}{\sum_\eta \exp\left\{\sum_C \Phi(C)\chi_C(\eta)\right\}}$$

将此式对 $\Phi(B)$ 作偏微分很容易得出 (6.3)中的等式. 因此只需验证其中的不等式(即 χ_A, χ_B 对 ν 是正相关的). 按(6.1)

$$(6.7)\qquad \int \chi_A\chi_B d\nu - \int \chi_A d\nu \int \chi_B d\nu$$

$$= K^{-1} \sum_{\eta,\zeta\in X} [\chi_A(\eta)\chi_B(\eta) - \chi_A(\eta)\chi_B(\zeta)]$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_R \Phi(R)[\chi_R(\eta) + \chi_R(\zeta)]\right\}$$

容易看出

$$\chi_A(\eta)\chi_B(\eta) = \chi_{A\triangle B}(\eta),\quad A\triangle B \triangleq (A\cup B)\setminus(A\cap B),$$

$$\chi_A(\eta)\chi_B(\zeta) = \chi_{A\triangle B}(\eta)\chi_B(\eta)\chi_B(\zeta) = \chi_{A\triangle B}(\eta)\chi_B(\gamma)$$

其中 $\gamma \triangleq \{\gamma(u): u\in S\}\in X$, $\gamma(u)\triangleq I_{\{\eta(u)=\zeta(u)\}}(\eta,\zeta)$, 还有

$$\chi_R(\eta) + \chi_R(\zeta) = \chi_R(\eta)(1 + \chi_R(\eta)\chi_R(\zeta))$$

$$= \chi_R(\eta)(1 + \chi_R(\gamma)]$$

于是(6.7) 可以写成

$$\int \chi_A\chi_B d\nu - \int \chi_A d\nu \int \chi_B d\nu$$

$$(6.8)\qquad = K^{-1} \sum_{\eta,\gamma} \chi_{A\triangle B}(\eta)(1 - \chi_B(\gamma))$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_R \Phi(R)(1 + \chi_R(\gamma))\chi_R(\eta)\right\}$$

$$= K^{-1} \sum_\gamma [1 - \chi_B(\gamma)] \sum_\eta \chi_{A\triangle B}(\eta)$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_R \Phi(R)(1 + \chi_R(\gamma))\chi_R(\eta)\right\}.$$

对固定的 $\gamma\in X$, $\Phi_\gamma(R)\triangleq\Phi(R)(1 + \chi_R(\gamma))$, $R\subset S$, 仍然是一

个取非负值的交互作用势，所以由 (6.2) 知 (6.8) 的右边中和式

$$\sum_{\eta}[\cdots]\geqslant 0.$$

故(6.3)中的不等式获证。□

7. 定理 设 $\Phi=\{\Phi(A): A\in\mathscr{S}, A\neq\phi\}$ 是伊辛模型的吸引对势，且无外场(即满足(5.2)且 $H=0$) 设 $\bar{\nu}_{0\beta}, \bar{\nu}_{1\beta}$ 为相应于 $\beta\Phi$ 的 $\bar{\nu}_0$, $\bar{\nu}_1$. 则

(7.1) $\quad\forall\beta\geqslant 0,\ \bar{\nu}_{0\beta}(A_u)+\bar{\nu}_{1\beta}(A_u)=1,\ A_u\triangleq\{\eta:\eta(u)=1\}$;

(7.2) $\quad\bar{\nu}_{1\beta}(A_u)$ 是 β 的不降函数;

(7.3) $\quad\exists\beta_c\in[0,\infty]$, 使 $\ |\mathscr{G}(\beta\Phi)|\begin{cases}=1, & \beta<\beta_c,\\ >1, & \beta>\beta_c;\end{cases}$

(7.4) $\quad\beta_c$ 是 $J\triangleq\{J(u,v), u, v\in S, u\neq v\}$的下降函数，此处 J 的升降指自然偏序而言，即 $J_i\triangleq\{J_i(u,v); u, v\in S, u\neq v\}$, $i=1,2$, $J_1\leqslant J_2$ 等价于 $J_1(u,v)\leqslant J_2(u,v)$, $u,v\in S$.

β_c 称为相应于 Φ 的**临界值**。

证. $\forall\beta\geqslant 0$, $\Lambda\in\mathscr{S}$, $\zeta\in X(S\setminus\Lambda)$, 定义

(7.5) $\quad\mu_{\Lambda,\zeta}^{(\beta)}\in\mathscr{P}(X): \mu_{\Lambda,\zeta}^{(\beta)}(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda))$

$$\triangleq\frac{\exp\left\{\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\xi\times\zeta)\right\}}{\sum\limits_{\omega\in X(\Lambda)}\exp\left\{\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\omega\times\zeta)\right\}}$$

于是若能证明:

(7.6) $$\mu_{\Lambda,\theta}^{(\beta)}(A_u)=\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u^c),$$

则由(1.10)知当 $\Lambda\uparrow S$ 时，

$$\bar{\nu}_{0\beta}(A_u)+\bar{\nu}_{1\beta}(A_u)=\lim_{\Lambda\uparrow S}\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u^c)+\lim_{\Lambda\uparrow S}\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u)=1$$

即(7.1)成立。

为了证明(7.6)，只需证明:

(7.7) $\quad\forall\xi\in X(\Lambda),\ \mu_{\Lambda,\theta}^{(\beta)}(\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda))=\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(\{1-\xi\}$

$\times X(S\backslash\Lambda))$

为此只需证(由表达式(7.5)知!):

(7.8) $\quad \forall \xi \in X(\Lambda)$,

$$\sum_{A\cap\Lambda\neq\phi} \Phi(A)\chi_A(\xi\times\theta) = \sum_{A\cap\Lambda\neq\phi} \Phi(A)\chi_A(1-\xi\times\theta),$$

其中 $\mathbf{1}-\eta \triangleq \{1-\eta(u): u\in S\}$, $\eta=\{\eta(u): u\in S\}\in\{0,1\}^S$. 由假设

$$(7.8)\text{ 的左边} = \sum_{\omega,\nu\in\Lambda} J(\omega,\nu)\chi_{\{\omega,\nu\}}(\xi)$$

$$+\sum_{\omega\in\Lambda}\sum_{\nu\bar{\in}\Lambda} J(\omega,\nu)\chi_{\{\omega,\nu\}}(\xi\times\theta)$$

$$= \sum_{\omega,\nu\in\Lambda} J(\omega,\nu)(2\xi(\omega)-1)(2\xi(\nu)-1)$$

$$-\sum_{\omega\in\Lambda}\sum_{\nu\bar{\in}\Lambda} J(\omega,\nu)(2\xi(\omega)-1),$$

$$(7.8)\text{ 的右边} = \sum_{\omega,\nu\in\Lambda} J(\omega,\nu)(1-2\xi(\omega))(1-2\xi(\nu))$$

$$+\sum_{\omega\in\Lambda}\sum_{\nu\bar{\in}\Lambda} J(\omega,\nu)(1-2\xi(\omega)).$$

故(7.8)成立,因而(7.1)成立.

当 $B\neq\phi$ 时,令 $\tilde{\Phi}(B)\triangleq\sum_{A\supset B}\Phi(A)$, 则由(7.5)知

$$\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(\xi\times\mathbf{1}) = \mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))$$

$$= \frac{\exp\left\{\beta\sum_{B\subset\Lambda}\tilde{\Phi}(B)\chi_B(\xi)\right\}}{\sum_{\omega\in X(\Lambda)}\exp\left\{\beta\sum_{B\subset\Lambda}\tilde{\Phi}(B)\chi_B(\omega)\right\}},$$

即 $\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}$ 具有(6.1)的形式. 由定理假设知 $\beta\tilde{\Phi}=\{\beta\tilde{\Phi}(B): B\subset\Lambda, B\neq\phi\}$ 满足引理6的条件,所以由(6.3)知(取 $\Lambda=\{u\}$),

$$\int \chi_{(u)} d\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}$$

是 β 的上升函数. 而

$$\int \chi_{(u)} d\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)} = \mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u) - \mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u^c) = 2\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u) - 1,$$

故 $\mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u)$ 是 β 的上升函数. 令 $\Lambda \uparrow S$, 则由(1.9)知 $\bar{\nu}_{1\beta}(A_u)$ 是 β 的上升函数,故(7.2)获证.

由(7.1),(7.2)知 $\bar{\nu}_{0\beta}(A_u)$ 是 β 的下降函数. 令

(7.9) $\quad \beta_c \triangleq \sup\{\beta: \bar{\nu}_{0\beta}(A_u) = \bar{\nu}_{1\beta}(A_u), u \in Z^d\}$

由命题 2.7(ii) 及定理 3.3 知 $\beta_c = \sup\{\beta: \bar{\nu}_{0\beta} = \bar{\nu}_{1\beta}\}$. 由定理 1 的(1.4)易见 β_c 使(7.3)成立.

(7.4)的证明与(7.2)的证明类似. 设有两个满足定理假设的交互作用势 Φ_1, Φ_2,且与之相应的函数

$$J_i = \{J_i(u,v): u,\ v \in S,\ u \neq v\},\ i = 1,\ 2,$$

还满足: $J_1(u,v) \leqslant J_2(u,v)$, $u, v \in S$, $u \neq v$. 与 J_i, $i = 1, 2$, 相应的临界值记作 $\beta_c^{(i)}$. 今用反证法往证:

(7.10) $\quad \beta_c^{(1)} \geqslant \beta_c^{(2)}$.

假设 $\beta_c^{(1)} < \beta_c^{(2)}$, 则 $\exists \beta \in (\beta_c^{(1)}, \beta_c^{(2)})$ 使

(7.11) $\quad \bar{\nu}_{02} = \bar{\nu}_{12},\ \bar{\nu}_{01} \neq \bar{\nu}_{11},$

其中 $\bar{\nu}_{0i}, \bar{\nu}_{1i}$ $(i = 1,2)$ 为相应于此 β, J_i 的 $\bar{\nu}_0$, $\bar{\nu}_1$. 此外将相应于此 β 及 J_i $(i = 1,2)$ 的 $\mu_{\Lambda,\theta}$, $\mu_{\Lambda,1}$, 分别记成 $\mu_{\Lambda,\theta}^{(i)}$, $\mu_{\Lambda,1}^{(i)}$, 则

$$\mu_{\Lambda,1}^{(i)}(\xi \times 1) = \exp\left\{\beta \sum_{B \subset \Lambda} \tilde{\Phi}_i(B) \chi_B(\xi)\right\} \Big/ \sum_{\omega \in X(\Lambda)} \exp\left\{\beta \sum_{B \subset \Lambda} \tilde{\Phi}_i(B) \chi_B(\omega)\right\}$$

其中

$$\tilde{\Phi}_i(B) = \sum_{A \supset B} \Phi_i(A),\ i = 1, 2,$$

于是由 $J_1(u,v) \leqslant J_2(u,v)$ 知 $\tilde{\Phi}_1(B) \leqslant \tilde{\Phi}_2(B)$. 同(7.2)的证

明类似，应用引理 6 的(6.3)可得：$\forall u \in S$ 有

$$\mu^{(1)}_{\Lambda,1}(A_u) \leqslant \mu^{(1)}_{\Lambda,1}(A_u),$$

令 $\Lambda \nearrow S$，由(1.10)及(7.1)知 $\forall u \in S$，

$$\bar{\nu}_{12}(A_u) \geqslant \bar{\nu}_{11}(A_u) \geqslant \bar{\nu}_{01}(A_u) \geqslant \bar{\nu}_{02}(A_u)$$

由 (7.11)的 $\bar{\nu}_{02} = \bar{\nu}_{12}$ 和 $\forall u \in S$，$\bar{\nu}_{01}(A_u) = \bar{\nu}_{11}(A_u)$，再由 $\bar{\nu}_{01} \leqslant \bar{\nu}_{11}$ 及命题 2.7(ii) 知 $\bar{\nu}_{01} = \bar{\nu}_{11}$，此与(7.11)的第二式矛盾．所以(7.10)成立，即(7.4)获证。□

下面讨论交互作用势满足定理 7 的假设时的相变问题．由定义 4 及定理 7 知就是讨论 (7.3) 中的 β_c 什么时候满足：

$$0 < \beta_c < \infty?$$

应用定理 1 及定理 5 有下列的

8. 推论 设 $S = Z^d$，$\Phi = \{\Phi(A); A \in \mathscr{S}, A \neq \phi\}$ 是满足定理 7 的交互作用势。则

(i) $\qquad \beta_c > 0$

(ii) 若二维紧邻伊辛模型有相变，则当 $d \geqslant 2$ 且

$$a \triangleq \inf\{J(u, v); u, v \in Z^d, |u - v| = 1\} > 0,$$

时，有 $\beta_c < \infty$.

(iii) 若二维紧邻伊辛模型有相变，则 $d(>2)$ 维紧邻伊辛模型有相变，且 $\beta_c^{(3)} \leqslant \beta_c^{(2)}$

证。由于当 β 充分小时

$$\sup_u \sum_{A \ni u} (|A| - 1)|\beta\Phi(A)| = \beta \sum_{\substack{v \in S \\ u \neq v}} J(u, v)$$

$$< 4^{-1} \log 2.$$

所以由定理 5 知$\beta_c > 0$，即 (i) 获证．

为证 (ii)，不失一般性可设 $a = 1$．令

$$(8.1)\ J_1(u, v) \triangleq \begin{cases} 1, & u, v \in Z_0^2 \triangleq \{u \in Z^d: u = (u_1, u_2, 0, \cdots, 0)\}, \\ & |u - v| = 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

记由 J_1 按 (4.2) 定义的无外场对势为 Φ_1，由定理 7 知相应的临界值存在，今记作 β_{1c} 则由(7.4)知

(8.2) $$\beta_c \leqslant \beta_{1c}.$$

记二维紧邻伊辛模型的交互作用势为 $\Phi^{(2)}$，其临界值为 $\beta_c^{(2)}$。于是要证 (ii) 只需证:

(8.3) $$\beta_{1c} \leqslant \beta_c^{(2)}.$$

对任意给定的 $\beta \geqslant 0$，记与 $\beta\Phi_1$，$\beta\Phi^{(2)}$ 相应的 $\bar{\nu}_i$，$i=0,1$ 分别为 $\bar{\nu}_{i1}, \bar{\nu}_i^{(2)}$，$\forall u^{(2)} = (u_1, u_2) \in Z^2$，记 $u = (u_1, u_2, 0, \cdots 0)$. 则要证 (8.3)，只需证:

(8.4) 若 $\exists u^{(2)} \in Z^2$，使

$$\bar{\nu}_0^{(2)}\{\eta \in \{0,1\}^{Z^2}: \eta(u^{(2)}) = 1\} < \bar{\nu}_1^{(2)}\{\eta \in \{0, 1\}^{Z^2}; \eta(u^{(2)}) = 1\}$$

则 $\bar{\nu}_{01}\{\eta \in \{0,1\}^{Z^d}: \eta(u)=1\} < \bar{\nu}_{11}\{\eta \in \{0, 1\}^{Z^d}: \eta(u) = 1\}$.

因此若(8.4)获证，则由 $\beta > \beta_c^{(2)} \Longrightarrow \beta > \beta_{1c}$，从而有(8.3).

为了证明 (8.4)，我们建立 $\mu \in \mathscr{G}(\beta\Phi_1) \subset \mathscr{P}(\{0, 1\}^{Z^d})$ 与 $\mu \in \mathscr{G}(\beta\Phi^{(2)}) \subset \mathscr{P}(\{0, 1\}^{Z^2})$之间的关系. 先考虑用 Φ_1 按(7.5)定义的 $\mu_{\Lambda,S}^{(\beta)}$，$\Lambda \in Z^d$，$|\Lambda| < \infty$，$\zeta \in X(S\backslash\Lambda)$. $\forall \Lambda \subset Z^d$，$|\Lambda| < \infty$，$\Lambda \cap Z_0^2 \neq \phi$. $\forall \xi \in \{0, 1\}^\Lambda$，$\forall \zeta \in \{0,1\}^{Z^d\backslash\Lambda}$，

$$\sum_{A \cap \Lambda \neq \phi} \Phi_1(A)\chi_A(\xi \times \zeta)$$

$$= \sum_{\substack{w,v \in \Lambda \\ |w-v|=1}} J_1(w, v)(2\xi(w) - 1)(2\xi(v) - 1)$$

(8.5) $$+ \sum_{\substack{w \in \Lambda, v \in \Lambda \\ |w-v|=1}} J_1(w, v)(2\xi(w) - 1)(2\zeta(v) - 1)$$

$$- \sum_{\substack{w,v \in \Lambda \cap Z_0^2 \\ |w-v|=1}} (2\xi(w) - 1)(2\xi(v) - 1)$$

$$+\sum_{\substack{w\in\Lambda\cap Z_0^2\\ v\in\Lambda^c\cap Z_0^2\\ |w-v|=1}}(2\xi(w)-1)(2\zeta(v)-1)$$

于是 $\forall\xi_1,\ \xi_2\in\{0,\ 1\}^\Lambda$,

(8.6) $$\xi_1(\Lambda\cap Z_0^2)=\xi_2(\Lambda\cap Z_0^2)\Longrightarrow\sum_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi_1(A)\chi_A(\xi_1\times\zeta)$$

$$=\sum_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi_1(A)\chi_A(\xi_2\times\zeta),$$

进一步,令 $\Lambda^{(2)}\triangleq\{u^{(2)}\in Z^2:u^{(2)}=(u_1,\ u_2),\ u=(u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots,u_d)\in\Lambda\cap Z_0^2\}=\{(u_1,\ u_2):(u_1,u_2,0,\cdots,0)\in\Lambda\}$, 则 $(\Lambda^c)^{(2)}=Z^2\setminus\Lambda^{(2)}$. 再 $\forall\xi\in\{0,\ 1\}^\Lambda,\ \zeta\in\{0,\ 1\}^{Z^d\setminus\Lambda}$, 令 $\xi^{(2)}\triangleq\{\xi^{(2)}(u^{(2)}):u^{(2)}\in\Lambda^{(2)}\}\in\{0,\ 1\}^{\Lambda^{(2)}}\subset\{0,\ 1\}^{Z^2}$, $\xi^{(2)}(u^{(2)})\triangleq\xi(u_1,\ u_2,0,\cdots,0)$, $u^{(2)}=(u_1,\ u_2)$, $u=(u_1,\ u_2,\ 0,\cdots 0)\in\Lambda$. $\zeta^{(2)}\triangleq\{\zeta^{(2)}(u_1,u_2):(u_1,u_2)\in(\Lambda^c)^{(2)}\}$, $\zeta^{(2)}(u_1,u_2)\triangleq\zeta(u_1,u_2,0,\cdots,0)$, $(u_1,\ u_2,\ 0,\cdots,0)\in\Lambda^c\}$. 则由(8.5)知

(8.7) $$\sum_{A\cap\Lambda^{(2)}\neq\phi}\Phi_1(A)\chi_A(\xi\times\zeta)$$

$$=\sum_{A\cap\Lambda^{(2)}\neq\phi}\Phi^{(2)}(A)\chi_A(\xi^{(2)}\times\zeta^{(2)}).$$

于是 $\forall u\in\Lambda\cap Z_0^2$, 由(8.6),(8.7)得

$$\mu_{\Lambda,\theta}^{(\beta)}(A_u)=\frac{\sum\limits_{\xi\in X(\Lambda\setminus u)}\exp\left\{\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi_1(A)\chi_A(1\times\xi\times\theta_{S\setminus\Lambda})\right\}}{\sum\limits_{\omega\in X(\Lambda)}\exp\left\{\beta\sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\phi}\Phi_1(A)\chi_A(\omega\times\theta_{S\setminus\Lambda})\right\}}$$

$$=\sum_{\tilde{\xi}\in X(\Lambda^{(2)}\setminus u^{(2)})}\exp\left\{\beta\sum_{A\cap\Lambda^{(2)}\neq\phi}\Phi^{(2)}(A)\chi_A(1\times\tilde{\xi}\times\theta_{Z^2\setminus\Lambda^{(2)}})\right\}$$

$$\cdot|\{\xi\in X(\Lambda\setminus u):\xi^{(2)}=\tilde{\xi}\}|$$

$$\Big/\Big[\sum_{\tilde{\omega}\in X(\Lambda^{(2)})}\exp\left\{\beta\sum_{A\cap\Lambda^{(2)}\neq\phi}\Phi^{(2)}(A)\chi_A(\tilde{\omega}\times\theta_{Z^2\setminus\Lambda^{(2)}})\right\}$$

$$\cdot|\{\omega\in X(\Lambda):\omega^{(2)}=\tilde{\omega}\}|\Big]$$

而

$$|\{\xi\in X(\Lambda\backslash u):\xi^{(2)}=\xi\}|=2^{|\Lambda\backslash u-(\Lambda\backslash u)\cap Z_0^2|}=2^{|\Lambda-\Lambda\cap Z_0^2|},$$

$$|\{\omega\in X(\Lambda):\omega^{(2)}=\tilde{\omega}\}|=2^{|\Lambda-\Lambda\cap Z_0^2|}.$$

于是

$$(8.8)\qquad \mu_{\Lambda,\theta}^{(\beta)}(A_u)=\mu_{\Lambda^{(2)},\theta}^{(\beta)}(\{\eta\in\{0,1\}^{Z^2}:\eta(u)=1\})$$

其中 $\mu_{\Lambda^{(2)},\theta}^{(\beta)}$，$\Lambda^{(2)}\subset Z^2$，$\theta\in\{0,\ 1\}^{Z^2\backslash\Lambda^{(2)}}$，为用 $\Phi^{(2)}$ 按(7.5)定义而属于 $\mathscr{P}(\{0,1\}^{Z^2})$ 的概率测度. 同法可证

$$(8.9)\qquad \mu_{\Lambda,1}^{(\beta)}(A_u)=\mu_{\Lambda^{(2)},1}^{(\beta)}(\{\eta\in\{0,1\}^{Z^2},\ \eta(u)=1\})$$

令 $\Lambda\uparrow Z^d$，则 $\Lambda^{(2)}\uparrow Z^2$，且由(1.9)知 $\forall u\in Z_0^2$

$$(8.10)\qquad \begin{aligned}\bar{\nu}_{01}\{\eta\in\{0,1\}^{Z^d}:\eta(u)=1\}&=\bar{\nu}_0^{(2)}\{\eta\in\{0,1\}^{Z^2}:\eta(u^{(2)})=1\},\\ \bar{\nu}_{11}\{\eta\in\{0,1\}^{Z^d}:\eta(u)=1\}&=\bar{\nu}_1^{(2)}\{\eta\in\{0,1\}^{Z^2}:\eta(u^{(2)})=1\}.\end{aligned}$$

故(8.4)成立.

(iii) 由 (i) 及 (ii) 的证明立刻得到. □

现在证明二维紧邻伊辛模型有相变,即

9. 定理 设 $S=Z^2$，交互作用势 Φ 满足

$$(9.1)\qquad \Phi(A)=\begin{cases}1, & A=\{u,v\},\quad |u-v|=1,\\ 0 & \text{其他 } A\neq\phi.\end{cases}$$

即 Φ 为吸引的紧邻对势，且(4.2)中的 $H=0$；$J(u,\ v)=1$，当 $|u-v|=1$，$J(u,v)=0$，当 $|u-v|\neq1$，则此模型有相变.

证. 由推论 8(i) 知只需证明:

$$(9.2)\qquad \beta_c<\infty$$

为此 $\forall n\in Z_+\backslash\{0\}$，令 $\Lambda_n\triangleq([-n,\ n]\cap Z)^2$. 记由(7.5)定义的 $\mu_{\Lambda_n,1}^{(\beta)}$ 为 $\mu_n^{(\beta)}$. 于是若能证明

$$(9.3)\qquad \lim_{\beta\to\infty}\mu_n^{(\beta)}(\{\eta:\eta(0)=0\})=0$$

对 n 一致成立,则由 (1.9)知 $\exists\beta<\infty$ 使

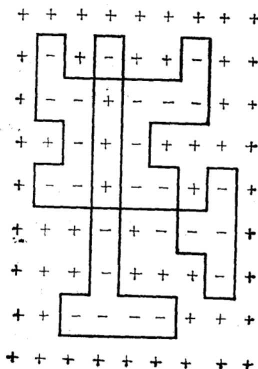
$$\bar{\nu}_{1\beta}\{\eta:\eta(0)=0\}<\frac{1}{2},$$

再由定理 7 (i) 知

$$\bar{\nu}_{0\beta}\{\eta:\eta(0)=1\}<\frac{1}{2}<\bar{\nu}_{1\beta}\{\eta:\eta(0)=1\},$$

由(7.9)知 $\beta_c<\beta<\infty$。

为了证明(9.3)，采用有名的 **Peierls 的证法**. 先将 $\eta\in\{0,1\}^{\Lambda_n}$ 在图上用下列方式标出：$\forall u\in\Lambda_n$，若 $\eta(u)=0$，则在 u 处标以"－"号，若 $\eta(u)=1$，则在 u 处标以"＋"号，再在 $\Lambda_{n+1}\backslash\Lambda_n$ 的各点上都标出"＋"号(因为 $\mu_n^{(\beta)}$ 在 Λ_n 外以 1 为边界). 然后对具有相反符号的两点，作它们的连线的垂直平分线(长度为 1). 下面的图便是 $n=3$ 时一个特殊的组态的上述图示法. 令 $B(\eta)$ 是所有这些长度为 1 的垂直平分线段的全体. 注意到最外一圈都是"＋"号，所以由 $B(\eta)$ 可以得出 η. 还有 $B(\eta)$ 是一些围道(不自交的闭折线)的不交并. 围道 γ 的长 $|\gamma|$ 是指 γ 中单位线段数。



组成 $B(\eta)$ 的一切围道的长的和记作 $|B(\eta)|$. 有了这些记号，就可以来证明(9.3)。

若 $\eta(0)=0$，则 0 至少被一围道环绕. 令 Γ 表环绕 0 的围道的集合. 则

$$(9.4)\qquad \mu_n^{(\beta)}\{\eta:\eta(0)=0\}\leqslant\sum_{\gamma\in\Gamma}\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\gamma\in B(\eta)\}$$

因此需要对固定的 $\gamma\in\Gamma$，估计 $\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\gamma\in B(\eta)\}$. 为此首先注意 $\forall\eta\in\{0,1\}^{\Lambda_n}$

$$(9.5)\qquad \sum_{A\cap\Lambda_n\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\eta\times 1)$$
$$=\sum_{\substack{\omega,v\in\Lambda_n\\|\omega-v|=1}}(2\eta(\omega)-1)(2\eta(v)-1)$$
$$+\sum_{\substack{\omega\in\Lambda_n\\ v\in\Lambda_n^c\\|\omega-v|=1}}(2\eta(\omega)-1)$$

中值为 -1 的项数为 $|B(\eta)|$. 设(9.5)中共有 N_n 项，则(9.5)中值为 $+1$ 的项数为 $N_n-|B(\eta)|$. 于是

$$\sum_{A\cap\Lambda_n\neq\phi}\Phi(A)\chi_A(\eta\times 1)=N_n-2|B(\eta)|,$$

从而由(7.5)知

$$\mu_n^{(\beta)}(\eta\times 1)=\frac{\exp\{-2\beta|B(\eta)|\}}{\sum\limits_{\omega\in X(\Lambda_n)}\exp\{-2\beta|B(\omega)|\}},$$

于是

$$(9.6)\qquad \mu_n^{(\beta)}\{\eta:\gamma\in B(\eta)\}=\frac{\sum\limits_{\gamma\in B(\eta)}\exp\{-2\beta|B(\eta)|\}}{\sum\limits_{\eta\in X(\Lambda_n)}\exp\{-2\beta|B(\eta)|\}}.$$

对于满足 $\gamma\in B(\eta)$ 的 $\eta\in X(\Lambda_n)$，定义

$$\tilde{\eta}\in X(\Lambda_n):\tilde{\eta}(u)=\begin{cases}1-\eta(u), & \text{若 }\gamma\text{ 环绕 }u,\\ \eta(u), & \text{其它情形.}\end{cases}$$

则 $B(\tilde{\eta})=B(\eta)\setminus\gamma$，因而 $|B(\eta)|=|\gamma|+|B(\tilde{\eta})|$，

$$\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\gamma\in B(\eta)\}\tag{9.7}$$

$$=\exp(-2\beta|\gamma|)\frac{\sum\limits_{\gamma\in B(\eta)}\exp\{-2\beta|B(\tilde{\eta})|\}}{\sum\limits_{\eta\in X(\Lambda_n)}\exp\{-2\beta|B(\eta)|\}}.$$

因为映射 $\eta\to\tilde{\eta}$ 是 $1-1$ 的，所以在右边的分子中出现的项都在分母中出现，从而由(9.7)得

$$\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\gamma\in B(\eta)\}\leqslant\exp\{-2\beta|\gamma|\},$$

由(9.4)即得

$$\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\eta(0)=0\}\leqslant\sum_{k=4}^{\infty}e^{-2\beta k}N(k,n),\tag{9.8}$$

其中 $N(k,n)$ 为长度为 k 的 $\gamma\in\Gamma$ 的围道数. 由于长度为 k 的 $\gamma\in\Gamma$ 必须穿过正半水平轴的 k 个位置之一，而且在 γ 的每一端点至多有三种方式延伸，所以对一切 n，$N(k,n)\leqslant k\cdot 3^k$，从而

$$\mu_n^{(\beta)}\{\eta:\eta(0)=0\}\leqslant\sum_{k=4}^{\infty}k\cdot 3^k e^{-2\beta k},$$

故由控制收敛定理知由此即得(9.3). □

下面讨论 $S=Z^1$ 的情形，先证明一条一般性的定理. 即

10. 定理 设自旋变相速度函数 $c(u,\eta)$ 有势 $V(\eta)$，$\mathscr{G}(V)$ 表相应的 Gibbs 态集.

(i) 若 $\mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{G}(V)$，且 $\mu_1\ll\mu_2$ (即 μ_1 关于 μ_2 绝对连续). 令 $h\triangleq\dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}$，则

$$\forall u\in S,\ h({}_u\eta)=h(\eta),\ \mu_2-a.e.,\tag{10.1}$$

(ii) 若 $\mu_2\in\mathscr{G}(V)$，$h:X\to R_+$，$\int h\,d\mu_2=1$ 且 h 满足 (10.1)，

则 $\mu_1: \mu_1(A) \triangleq \int_A h d\mu_2$, $A \in \mathscr{F}$, 为 Gibbs 态.

证. 1° 先证下列事实: 设 $\mu \in \mathscr{G}(V)$, g 为 μ 可积函数,则 $\forall u \in S$, 有

$$(10.2) \qquad \int g({}_u\eta)\exp\{V({}_u\eta) - V(\eta)\}\mu(d\eta) = \int g d\mu.$$

由定理 2.3.4(i) 知只需证: $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \zeta \in X(\Lambda)$, $\forall u \in S$, (10.2) 对 $\mu_{\Lambda,\zeta}$ (定义见 (2.3.3.1)!) 成立.

当 $u \in \Lambda$ 时,由(2.3.3.1)及(2.1.8.3)知

$$\int g({}_u\eta)\exp\{V({}_u\eta) - V(\eta)\}\mu_{\Lambda,\zeta}(d\eta)$$

$$= \sum_{\eta \in X(\Lambda)} g({}_u\eta \times \zeta)\exp\{V({}_u\eta \times \zeta) - V(\eta \times \zeta)\}f^{\wedge}(\eta \times \zeta)$$

$$= \sum_{\eta \in X(\Lambda)} g({}_u\eta \times \zeta)f^{\wedge}({}_u\eta \times \zeta) = \int g d\mu_{\Lambda,\zeta}.$$

当 $u \notin \Lambda$ 时, 以同法可更简单地证明上式左、右两边成立.

2° 往证 (i). 由(10.2)及 μ_1 的定义知 $\forall u \in S$, $\forall f \in C_b(X)$

$$\int f(\eta)h({}_u\eta)\mu_2(d\eta)$$

$$= \int f({}_u\eta)h(\eta)\exp\{V({}_u\eta) - V(\eta)\}\mu_2(d\eta)$$

$$= \int f({}_u\eta)\exp\{V({}_u\eta) - V(\eta)\}\mu_1(d\eta)$$

$$= \int f(\eta)\mu_1(d\eta) = \int f(\eta)h(\eta)\mu_2(d\eta).$$

故(10.1)成立.

3° 最后证 (ii). 由定理 2.3.7 (i) 知只需证: μ_1 关于 $c(u,\eta)$ 可逆. 设 $f \in C_b(X)$, 则由(10.2)及 $\mu_2 \in \mathscr{G}(V)$ 知

$$\int c(u,\eta)f({}_u\eta)\mu_1(d\eta) = \int c(u, \eta)f({}_u\eta)h(\eta)\mu_2(d\eta)$$

$$= \int c(u, {}_u\eta) f(\eta) h({}_u\eta) \exp\{V({}_u\eta) - V(\eta)\} \mu_2(d\eta)$$

$$\xlongequal{(2.1.8.2)} \int c(u, \eta) f(\eta) h({}_u\eta) \mu_2(d\eta)$$

$$\xlongequal{(10.1)} \int c(u, \eta) f(\eta) h(\eta) \mu_2(d\eta)$$

$$= \int c(u, \eta) f(\eta) \mu_1(d\eta).$$

故由命题2.1.6(i)知 μ_1 关于 $c(u,\eta)$ 可逆。□

11. 推论 设自旋变相速度函数有势 V，$\mathscr{G}(V)$ 为其相应的 Gibbs 态集。若 $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathscr{G}(V)$ 都有 $\mu_1 \ll \mu_2$，则 $|\mathscr{G}(V)| = 1$。

证. 设 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{G}(V)$，需要证 $\mu_1 = \mu_2$。由推论假设知 $\mu_1 \ll \mu_2$ 且 $\mu_2 \ll \mu_1$，故 $h \triangleq \dfrac{d\mu_1}{d\mu_2} > 0$, $a.e.(\mu_2)$。于是转化为要证明 $h = 1$, $a.e.(\mu_2)$。今用反证法证之。假设不然，则必存在一 $c > 0$ 使 $\mu_2(A) \in (0, 1)$，其中 $A \triangleq \{\eta: h(\eta) > c\}$。令 $g \triangleq \mu_2(A)^{-1} \cdot I_A$，由定理10(i)知 h 满足(10.1)，于是 $I_A(\eta) = 1$，当且仅当 $\forall u \in S$, $h({}_u\eta) = h(\eta) > c$，即当且仅当 $\forall u \in S, I_A({}_u\eta) = 1$，从而 $\forall u \in S$, $g(\eta) = g({}_u\eta)$，即 g 满足(10.1)。于是由定理10(ii)得知

$$\mu_3: \mu_3(A) \triangleq \int_A g(\eta) \mu_2(d\eta), \quad A \in \mathscr{F},$$

为 Gibbs 态。但 $\mu_2(A^c) > 0$，$\mu_3(A^c) = 0$，即 μ_2 对 μ_3 不绝对连续。这与假设矛盾。□

12. 推论 $\mu \in \mathscr{G}(V)$ 是 $\mathscr{G}(V)$ 中的极点当且仅当 X 上满足(10.1)的 $\mathscr{F}$ 可测函数只有 μ-$a.e.$ 常值函数。

证 设 $\mu \in \mathscr{G}(V)$ 不是 $\mathscr{G}(V)$ 的极点，则 $\exists \alpha \in (0, 1)$ 及 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{G}(V)$，$\mu_1 \neq \mu$，$\mu_2 \neq \mu$，且 $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$。由

此知 $\mu_1 \ll \mu$. 由定理 10(i) 知 $\forall u \in S$, $\frac{d\mu_1}{d\mu}({}_u\eta) = \frac{d\mu_1}{d\mu}(\eta)$ μ-$a.e.$, 由 $\mu_1 \neq \mu$ 知 $\frac{d\mu_1}{d\mu}$ 不是 $a.e.(\mu)$ 常值函数.

反之,若存在 X 上的 $\mathscr{F}$ 可测函数 h, 它是非 μ-$a.e.$ 常值函数且满足(10.1), 则 h^+, h^- 也满足(10.1)且必有一为非 μ-$a.e.$ 常值函数, 即存在一非负非 μ-$a.e.$ 常值函数 $\tilde{h}$ 满足(10.1). 而且可设 $\tilde{h}$ 有界, 因为 $\forall M > 0$, $\tilde{h} \wedge M$ 都是满足(10.1)的. 故存在 X 上的 $\mathscr{F}$ 可测函数 h_1, 它是满足 (10.1) 的非负非 μ-$a.e.$ 常值有界(设界为 M)函数且

$$\int h_1 d\mu = 1.$$

于是 $M > 1$ 且由定理 10(ii) 知

$$\mu_1: \mu_1(A) \triangleq \int_A h_1 d\mu, \quad A \in \mathscr{F},$$

是 Gibbs 态. 令 $h_2 \triangleq (M-1)^{-1}(M-h_1)$, 则 h_2 也是非负非 μ-$a.e.$ 常值且满足(10.1)的 $\mathscr{F}$ 可测函数, 还有 $\int h_2 d\mu = 1$, 于是由定理 10(ii) 知 $\mu_2: \mu_2(A) \triangleq \int_A h_2 d\mu$, $A \in \mathscr{F}$, 也是 Gibbs 态. 易见 $\mu \neq \mu_1$, 且

$$\mu = \frac{1}{M}\mu_1 + \frac{M-1}{M}\mu_2.$$

即 μ 不是 $\mathscr{G}(V)$ 的极点. □

13. 定理 设 $S = Z^1$, $\Phi: \mathscr{S} \backslash \{\phi\} \to R$ 是平移不变的交互作用势(即 $\forall u \in S$, $\forall A \in \mathscr{S} \backslash \{\phi\}$, $\Phi(A+u) = \Phi(A)$, 其中 $A + u \triangleq \{v + u: v \in A\}$) 且满足

$$\sum_{A \ni 0} \frac{(\operatorname{diam} A) \cdot |\Phi(A)|}{|A|} < \infty, \tag{13.1}$$

其中

$$\operatorname{diam} A \triangleq \sup\{|u-v|: u, v \in A\} = \sup_{u \in A} u - \inf_{v \in A} v,$$

则 $|\mathscr{G}(\Phi)| = 1$.

证. 由 § 2.2 例 6(i) 知相应于此 Φ 的伊辛模型有势 $\boldsymbol{V}$. 且由 $\mathscr{G}(V)$ 及 $\mathscr{G}(\Phi)$ 的定义知 $\mathscr{G}(V) = \mathscr{G}(\Phi)$. 故要证定理只需证明推论 11 的假设成立. 为此令

(13.2)
$$\Lambda \triangleq [-n, n] \cap Z^1,$$

$\zeta_1, \zeta_2 \in \{0, 1\}^{S \setminus \Lambda}$. 则

(13.3)
$$\frac{\exp\left\{\sum_{A \cap \Lambda \neq \phi} \Phi(A) \chi_A(\eta \times \zeta_1)\right\}}{\exp\left\{\sum_{A \cap \Lambda \neq \phi} \Phi(A) \chi_A(\eta \times \zeta_2)\right\}}$$

$$= \exp\left\{\sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda^c \neq \phi}} \Phi(A)[\chi_A(\eta \times \zeta_1) - \chi_A(\eta \times \zeta_2)]\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{2 \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda^c \neq \phi}} |\Phi(A)|\right\}\left(\geqslant \exp\left\{-2 \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda_c \neq \phi}} |\Phi(A)|\right\}\right)$$

今往估计:

(13.4)
$$I \triangleq \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda^c \neq \phi}} |\Phi(A)|.$$

对任何满足 $A \cap \Lambda \neq \phi$, $A \cap \Lambda^c \neq \phi$ 的 $A \in \mathscr{S}$ 来说,令

$$\Lambda_-^c \triangleq \Lambda^c \cap (-\infty, -n), \quad \Lambda_+^c \triangleq \Lambda^c \cap (+n, \infty),$$

则 (i) $A \cap \Lambda_-^c \neq \phi$, $A \cap \Lambda \neq \phi$, (ii) $A \cap \Lambda_+^c \neq \phi$, $A \cap \Lambda \neq \phi$ 必有一成立. 于是由平移不变性

$$I \leqslant \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda_-^c \neq \phi}} |\Phi(A)| + \sum_{\substack{A \cap \Lambda \neq \phi \\ A \cap \Lambda_+^c \neq \phi}} |\Phi(A)|$$

(13.5)
$$\leqslant \sum_{\substack{(A+n+1) \cap (\Lambda+n+1) \neq \phi \\ (A+n+1) \cap (\Lambda_-^c+n+1) \neq \phi}} |\Phi(A+n+1)|$$

$$+ \sum_{\substack{(A-n)\cap(A-n)\neq\phi; \\ (A-n)\cap(A_+^c-n)\neq\phi}} |\Phi(A-n)|$$

$$\leqslant 2 \sum_{\substack{A\cap(-\infty,0]\neq\phi \\ A\cap(0,\infty)\neq\phi}} |\Phi(A)|$$

如果 $\tilde{A}$ 可由平移 A 而得到，则称 $\tilde{A}$ 与 A 同余．容易看出：对任意满足 $A_0\cap(-\infty,0]=\{0\}$的有限子集 A_0 来说，最多有 $\mathrm{diam}A_0$ 个 A 与之同余，且恰有 $|A_0|$ 个满足 $A\ni 0$ 的集与之同余． 故由(13.5)

$$(13.6) \qquad l \leqslant 2 \sum_{\substack{A\cap(-\infty,0]=\{0\} \\ A\cap(0,\infty)\neq\phi}} (\mathrm{diam}A)\cdot|\Phi(A)|$$

$$\leqslant 2 \sum_{A\ni 0} \frac{(\mathrm{diam}A)|\Phi(A)|}{|A|}$$

于是令

$$c \triangleq \exp\left\{2\sum_{A\ni 0}\frac{(\mathrm{diam}A)\cdot|\Phi(A)|}{|A|}\right\} < \infty,$$

则由(13.3)，(13.4)，(13.6)知 $\forall\eta\in X(\Lambda)$

$$(13.7) \qquad c^{-2} \leqslant \frac{\mu_{\Lambda,\zeta_1}(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda))}{\mu_{\Lambda,\zeta_2}(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda))} \leqslant c^2.$$

因此由定义 2.3.3 知 $\forall\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2\in\mathscr{G}_{\zeta,\Lambda}$ 知

$$(13.8) \qquad c^{-2} \leqslant \frac{\tilde{\mu}_1(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda))}{\tilde{\mu}_2(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda))} \leqslant c^2,\ \forall\eta\in X(\Lambda).$$

$\forall\mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{G}(\Phi)$，则由定理 2.3.4(i) 知 $\exists\mu_i^{(n)}\in\mathscr{G}_{\zeta,\Lambda_n}$，$i=1,\ 2$，$\Lambda_n\triangleq[-n,\ n]\cap Z^1$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，使 $\mu_i^{(n)}\Longrightarrow\mu_i$，$(n\to\infty)$．因此由附录知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$\forall\eta\in X(\Lambda)$，$\mu_i^{(n)}(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda))\to\mu_i(\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda)$，$i=1,\ 2$．于是由(13.8)知其中的 $\tilde{\mu}_i$，$i=1$，2 换成 μ_i 仍然成立，从而 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，$A\subset X(\Lambda)$，有

$$(13.9) \qquad c^{-2}\mu_2(A\times X(S\backslash\Lambda)) \leqslant \mu_1(A\times X(S\backslash\Lambda))$$

$$\leqslant c^2\mu_2(A\times X(S\backslash\Lambda)).$$

注意集代数 $\{A\times X(S\backslash \Lambda):\ \Lambda\in\mathscr{S},\ A\in X(\Lambda)\}$ 生成 σ- 代数 $\mathscr{F}$，并应用单调类定理知 $\forall A\in\mathscr{F}$ 有 $c^{-2}\mu_2(A)\leqslant\mu_1(A)\leqslant c^2\mu_2(A)$. 故 μ_1, μ_2 相互绝对连续,因此由推论 11 知 $|\mathscr{G}(\Phi)|=1$. □

注 由 (13.9) 实际可证明 $c^{-2}\leqslant\dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}\leqslant c^2$, μ-a.e.

14. 推论 设 $S=Z^1$, $\Phi:\mathscr{S}\backslash\{\phi\}\to R_+$ 是无外场平移不变吸引对势,且

$$\sum_{n\neq 0}|n|\Phi(\{0,n\})<\infty,$$

则相应的伊辛模型无相变，特别一维紧邻伊辛模型无相变。

证. 显然 $\forall\beta>0$,

$$\sum_{A\ni 0}\frac{(\mathrm{diam}A)|\beta\Phi(A)|}{|A|}=\beta\sum_{n\neq 0}\frac{|n|\Phi(\{0,n\})}{2}<\infty,$$

因而 $|\mathscr{G}(\beta\Phi)|=1$，故相应的伊辛模型无相变。至于后一结论显然。□

总结定理 7,9, 推论 8,14 的有关结果,将它们叙述成下列的

15. 定理 设 $S=Z^d$, $\Phi:\mathscr{S}\backslash\phi\to R_+$ 是平移不变无外场吸引对势,且记 (5.2) 中的 $J(u,v)=\Phi(\{u,v\})=J_0(u-v)$, 则

(i) 当 $d=1$ (此时 $J_0(u)=J_0(|u|)$!) 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}nJ_0(n)<\infty$$

时,相应的伊辛模型无相变.

(ii) 当 $d\geqslant 2$ 且 $\forall u\in\{v\in Z^d:|v|=1\}$, $J_0(u)>0$ 时,相应的伊辛模型有相变.

16. 下面我们介绍迄今所得到的一些有关伊辛模型相变的结果。以下设 $S=Z^d$, $\Phi:\mathscr{S}\backslash\phi\to R_+$ 是平移不变吸引对势。且

记(5.2)中的 $J(u,v)=\Phi(\{u,v\})=J_0(u-v)$.

对 $d=1$, $H=0$ (即无外场)的情形,由定理 15(i) 知当

$$\sum_{n=1}^{\infty} nJ_0(n) < \infty$$

时,相应的伊辛模型无相变. Rogers 与 Thompson (1981) 改进了这个结果,证明当

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log N}} \sum_{n=1}^{N} nJ_0(n) = 0$$

时,相应的伊辛模型无相变.另一方面 Fröhlich 与 Spencer (1982) 证明: 若 $J_0(n)=n^{-2}$,则相应的伊辛模型有相变. 由此结果及定理 7、推论8(i) 知当

$$\inf_n n^2 J_0(n) > 0$$

时,相应的伊辛模型有相变.

对 $d \geqslant 2$ 的情形,Ruelle(1971) 及 Lebwitz 与 Martin-Löf (1972) 证明: 当 $H \neq 0$ 时,伊辛模型无相变. 而当 $H=0$ 时, 则有定理 15(ii) 的结论. 对于物理有兴趣的问题是计算 β_c 的精确值,当 $d=2$ 时,已知

$$\beta_c^{(2)} = \beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

事实上,1944 年 Onsager 首次得

$$J_0(u)=\begin{cases}1, & |u|=1,\\ 0, & |u|>1\end{cases}$$

时,已知

$$\beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

事实上,1944 年 Onsager 首先宣布:

$$\bar{\nu}_{1\beta}\{\eta:\eta(u)=1\}-\frac{1}{2}=[1-(\sinh 2\beta)^{-4}]^{\frac{1}{8}},$$

这就是说(由定理 7 可知) $\beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$，而且当 $\beta = \beta_c$ 时 Gibbs 态唯一。这个结果的严格证明和更近代的说法参见 Abraham 与 Martin-Löf(1973) 及 Benettin-Gallavotti 与 Jona-Lasinio(1973)。对于 $d > 3$，紧邻伊辛模型的临界点的精确值尚不知道，甚至还不知道是否有 $\beta_c^{(3)} < \beta_c^{(2)}$，其中 $\beta_c^{(d)}$ 表示 d 维紧邻伊辛模型的临界值(由推论 8(ii) 知 $\beta_c^{(3)} \leqslant \beta_c^{(2)}$)。

§5 归结到吸引过程

本节将叙述一个耦合方法，用它可以将具有一般速度函数 $c(u,\eta)$ 的自旋变相过程的遍历性问题归结为具有很简单的不变测度的吸引过程的相应问题。这种转变一般并不是等价的，即有关的吸引过程非遍历时，而原过程则可能遍历。

1. 基本假设、记号及步骤 由于问题比较复杂，先来说明一下解决问题的步骤，顺便也引进一些在本节中用到的记号及假设。

本节始终设 $c(u,\eta)$，$u \in S$，$\eta \in X$ 为满足定理1.2.7 条件的自旋变相速度函数。$\{\eta_t: t \geqslant 0\}$，$\{\zeta_t: t \geqslant 0\}$ 表示两个具有速度函数 $c(u,\eta)$ 的自旋变相过程，初始组态未必相同。$\forall u \in S$，$\forall \xi \in X$，定义

(1.1) $$\beta(u,\xi) \triangleq \sup\{|c(u,\eta) - c(u,\zeta)|: \forall v \in S, |\eta(v) - \zeta(v)| \leqslant \xi(v)\},$$

(1.2) $$\delta(u,\xi) \triangleq \inf\{c(u,\eta) + c(u,\zeta): \eta(u) \neq \zeta(u) \text{ 且 } \forall v \in S, |\eta(v) - \zeta(v)| \leqslant \xi(v)\},$$

(1.3) $$c_1(u,\xi) \triangleq \xi(u)\delta(u,\xi) + (1 - \xi(u))\beta(u,\xi).$$

首先将证明以 $c_1(u,\xi)$ 为速度函数的自旋变相过程 $\{\xi_t: t \geqslant 0\}$ 存在且为吸引的，以及它的一些特性。其次将过程 $\{\xi_t: t \geqslant 0\}$，

$\{\eta_t: t \geqslant 0\}$，$\{\zeta_t: t \geqslant 0\}$ 耦合成一个三元过程，在其中后两者按§2的基本耦合方式耦合，而三者的耦合则满足：若

(1.4) $\quad \xi, \eta, \zeta \in X, \ \forall u \in S, \ |\eta(u) - \zeta(u)| \leqslant \xi(u),$

则有

(1.5) $\quad \forall t \geqslant 0 \ P_{(\xi,\eta,\zeta)}(\{|\eta_t(u) - \zeta_t(u)| \leqslant \xi_t(u), \forall u \in S\}) = 1.$

最后证明：若 $\{\xi_t: t \geqslant 0\}$ 遍历，则 $\{\eta_t: t \geqslant 0\}$ 遍历。

2. 引理 设 $c_1(u,\xi)$ 如(1.3)定义，则 (i)$c_1(u,\cdot)$, $u \in S$, 为一致有界连续函数且变差一致可和；(ii) $c_1(u,\xi)$ 为吸引的；(iii) $\forall u \in S$, $\beta(u,\theta) = 0$; (iv) ν_0 为 $\{\xi_t: t \geqslant 0\}$ 的不变测度；从而 $\{\xi_t: t \geqslant 0\}$ 遍历当且仅当 ν_0 是它的唯一不变测度。

证. 1° 由(1.1)、(1.2)易知 $\beta(u,\cdot)$, $\delta(u,\cdot)$, $u \in S$, 一致有界，今往证 $\beta(u,\cdot) \in C_b(X)$, $\delta(u,\cdot) \in C_b(X)$, $\forall u \in S$.

由于X是紧距离空间，且 $c(u,\cdot) \in C_b(X)$, $c(u,\cdot)$ 在X上一致连续，于是 $\exists \Lambda \in \mathscr{S}$ 使

(2.1) $\quad |c(u,\eta) - c(u,\zeta)| < \dfrac{\varepsilon}{4}, \ \forall \eta, \zeta \in X, \ \eta_\Lambda = \zeta_\Lambda.$

因此 $\forall \eta, \zeta \in X$ 有

$$
\begin{aligned}
&|c(u,\eta_\Lambda \times \theta_{S\setminus\Lambda}) - c(u,\zeta_\Lambda \times \theta_{S\setminus\Lambda})| - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\quad \leqslant |c(u,\eta) - c(u,\zeta)| \\
&\quad \leqslant |c(u,\eta_\Lambda \times \theta_{S\setminus\Lambda}) - c(u,\zeta_\Lambda \times \theta_{S\setminus\Lambda})| + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

由(1.1)即得

(2.2) $\quad \beta_\Lambda(u,\xi_\Lambda) - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \beta(u,\xi) \leqslant \beta_\Lambda(u,\xi_\Lambda) + \dfrac{\varepsilon}{2},$

其中

$$
\begin{aligned}
\beta_\Lambda(u,\xi_\Lambda) \triangleq \sup\{&|c(u,\eta \times \theta_{S\setminus\Lambda}) - c(u,\zeta \times \theta_{S\setminus\Lambda})|: |\eta(v) \\
&- \zeta(v)| \leqslant \xi(v), v \in \Lambda\}.
\end{aligned}
$$

而对上述的 Λ，$\exists\delta>0$ 使当 $\rho(\xi,\xi')<\delta$ 时有 $\xi_\Lambda=\xi'_\Lambda$，于是由(2.2)知有

$$\beta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\beta(u,\xi')\leqslant\beta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)+\frac{\varepsilon}{2}$$

总结以上讨论即得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $\rho(\xi,\xi')<\delta$ 时

$|\beta(u,\xi)-\beta(u,\xi')|<\varepsilon$. 即$\beta(u,\cdot)\in C_b(X)$，$\forall u\in S$.

为了证明 $\delta(u,\cdot)\in C_b(X)$，取满足 (2.1)的 $\Lambda\ni u$，则由(2.1)知 $\forall\eta,\zeta\in X$ 有

$$\begin{aligned}c(u,\eta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})+c(u,\zeta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})-\frac{\varepsilon}{2}\\ \leqslant c(u,\eta)+c(u,\zeta)\leqslant c(u,\eta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})\\ +c(u,\zeta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由(1.2)即得

$$\delta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\delta(u,\xi)\leqslant\delta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)+\frac{\varepsilon}{2},\tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)\triangleq\inf\{[c(u,\eta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})\\ +c(u,\zeta_\Lambda\times\theta_{S\setminus\Lambda})]:\eta(u)\neq\zeta(u)\ \text{且}\\ \forall v\in\Lambda,|\eta(v)-\zeta(v)|\leqslant\xi(v)\}.\end{aligned}$$

而对上述的 Λ，$\exists\delta>0$ 使当 $\rho(\xi,\xi')<\delta$ 时有 $\xi_\Lambda=\xi'_\Lambda$，从而 $\delta_\Lambda(u,\xi'_\Lambda)=\delta_\Lambda(u,\xi_\Lambda)$，于是在(2.3)中以 $\delta(u,\xi')$ 替换 $\delta(u,\xi)$ 后仍然成立。故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $\rho(\xi,\xi')<\delta$ 时，

$|\delta(u,\xi)-\delta(u,\xi')|<\varepsilon$，即 $\forall u\in S$，$\delta(u,\cdot)\in C_b(X)$.

2° 为证 $c_1(u,\cdot)$ 的变差一致可和，只需证：$\forall\{u,w\}\subset S$，$u\neq w$，有

$$\begin{cases}\Delta_{\beta(u,\cdot)}(w)\leqslant\Delta_{c(u,\cdot)}(w),\\ \Delta_{\delta(u,\cdot)}(w)\leqslant\Delta_{c(u,\cdot)}(w).\end{cases}\tag{2.4}$$

由 $\beta(u,\xi)$ 的定义(1.1)知 $\forall u\in S$，$\xi\in X$ 知

(2.5) $\beta(u,\xi)=\sup\{|c(u,\eta)-c(u,\zeta)|:(\eta,\zeta)\in A_\xi\}$,

其中

(2.6) $$A_\xi \triangleq \{(\eta,\zeta)\in X\times X: |\eta(v)-\zeta(v)|\leqslant \xi(v),\ v\in S\}$$
$$=\bigcap_{\xi(v)=0}\{(0,0),(1,1)\}\times(X(S\backslash v)\times X(S\backslash v))$$

为闭集，且显然有

(2.7) $\xi_1\leqslant\xi \Rightarrow A_{\xi_1}\subset A_\xi \Rightarrow \beta(u,\xi_1)\leqslant\beta(u,\xi),\ \forall u\in S$.

又由于$X\times X$是紧距离空间，A_ξ是紧集。故由(2.5)知

(2.8) $\exists(\eta_1,\zeta_1)\in A_\xi$ 使 $\beta(u,\xi)=|c(u,\eta_1)-c(u,\zeta_1)|$.

设 $w\neq u$，则当

(2.9) $\xi(w)=1$

时，${}_w\xi\leqslant\xi$，于是由(2.7)、(2.8)知

(2.10) $0\leqslant\beta(u,{}_w\xi)\leqslant\beta(u,\xi)=|c(u,\eta_1)-c(u,\zeta_1)|$

若 $\eta_1(w)=\zeta_1(w)$，则由(2.6)知 $(\eta_1,\zeta_1)\in A_{({}_w\xi)}$，因而由(2.5)知 $\beta(u,{}_w\xi)\geqslant|c(u,\eta_1)-c(u,\zeta_1)|$。结合(2.10)知 $\beta(u,{}_w\xi)=\beta(u,\xi)$，故得

(2.11) $|\beta(u,{}_w\xi)-\beta(u,\xi)|\leqslant\Delta_{c(u,\cdot)}(w)$.

若 $\eta_1(\omega)\neq\zeta_1(w)$，则由(2.6)及 $(\eta_1,\zeta_1)\in A_\xi$ 知 $({}_w(\eta_1),\zeta_1)\in A_{({}_w\xi)}$，从而由(2.5)知 $\beta(u,{}_w\xi)\geqslant|c(u,{}_w(\eta_1))-c(u,\zeta_1)|$.于是由(2.10)得知

$$|\beta(u,{}_w\xi)-\beta(u,\xi)|=\beta(u,\xi)-\beta(u,{}_w\xi)$$
$$\leqslant|c(u,\eta_1)-c(u,\zeta_1)|-|c(u,{}_w(\eta_1))-c(u,\zeta_1)|$$
$$\leqslant|c(u,{}_w(\eta_1))-c(u,\eta_1)|\leqslant\Delta_{c(u,\cdot)}(w),$$

即(2.11)仍然成立。当(2.9)不成立时，则 $({}_w\xi)(w)=1$. 于是只要将(2.9)以下的推导中的 $\xi,{}_w\xi$ 互换，仍然可得(2.11)。故(2.4)的第一式获证。

至于(2.4)的第二式证明类似。首先 $\forall u\in S$，$\forall\xi\in X$ 由 $\delta(u,\xi)$ 的定义知

$$\delta(u, \xi) = \inf\{c(u, \eta) + c(u, \zeta):(\eta, \zeta) \in B_{u,\xi}\},$$

其中

$$B_{u,\xi} \triangleq \{(\eta,\zeta) \in X \times X: \eta(u) \neq \zeta(u), \text{且}$$
$$\forall v \in S, |\eta(v) - \zeta(v)| \leqslant \xi(v)\}$$
$$= \{(\eta, \zeta): \eta(u) \neq \zeta(u)\} \cap A_\xi$$

为$X \times X$的闭子集，从而是紧集．于是有

(2.12) $\quad \xi_1 \leqslant \xi \Rightarrow B_{u,\xi_1} \subset B_{u,\xi}, \forall u \in S \Rightarrow \delta(u, \xi_1) \geqslant \delta(u,\xi) \ \forall u \in S,$

且 $\exists(\eta_2, \zeta_2) \in B_{u,\xi}$ 使

$$\delta(u, \xi) = c(u,\eta_2) + c(u, \zeta_2)$$

设 $w \neq u$，且(2.9)成立，则 $\delta(u, {}_w\xi) \geqslant \delta(u, \xi)$，于是仿照证明(2.11)的方法可得：当 $\eta_2(w) = \zeta_2(w)$ 时，$\delta(u, {}_w\xi) = \delta(u, \xi)$ 当 $\eta_2(w) = \zeta_2(w)$ 时，$({}_w(\eta_2), \zeta_2) \in B_{u,({}_w\xi)}$，从而

$$\delta(u, {}_w\xi) \leqslant c(u, {}_w(\eta_2)) + c(u, \zeta_2).$$

故不论哪种情形，都有

(2.13) $\quad |\delta(u, {}_w\xi) - \delta(u, \xi)| \leqslant |c(u, {}_w(\eta_2)) - c(u, \eta_2)| \leqslant \Delta_{c(u,\cdot)}(w).$

若(2.9)不成立，则在上述推导中将 $\xi, {}_w\xi$ 互换仍可得(2.13)。故(2.4)的第二式成立。

3° 由(1.3)，(2.7)及(2.12)立知 $c_1(u, \xi)$ 吸引．由 $\beta(u, \xi)$ 的定义知，$\forall u \in S$，

$$\beta(u, \theta) = \sup\{|c(u, \eta) - c(u, \zeta)|: \forall v \in S, |\eta(v) - \zeta(v)| \leqslant \theta(v)\}$$
$$= \sup\{|c(u, \eta) - c(u, \zeta)|: \forall v \in S, \eta(v) = \zeta(v)\} = 0.$$

从而 $\forall u \in S$, $\forall f \in \mathscr{D}(X)$,

$$c_1(u, \theta) = 0 \cdot \delta(u, \theta) + (1 - 0)\beta(u, \theta) = 0,$$

$$\int \Omega_1 f dv_0 - (\Omega_1 f)(\theta) = \sum_{u\in S} c_1(u,\theta)[f({}_u\theta) - f(\theta)] = 0.$$

故 (ii)、(iii)、(iv) 获证。□

3. 定义 为了证明第 1 目中所述的耦合存在，首先应该定义适当的转移概率速率测度 $c(u, (\xi, \eta, \zeta), A)$，本目将进行这一工作。

首先注意这个耦合要求 η_t, ζ_t 按 § 2 方式耦合，这个耦合又要求(1.4)导致(1.5)，所以 (ξ_t, η_t, ζ_t) 由闭集

$$(3.1)\begin{cases}\tilde{X} \triangleq \{(\xi,\eta,\zeta) \in X^3 : \forall u \in S, |\eta(u) - \zeta(u)| \leqslant \xi(u)\} = Y^S, \\ Y = \{(0, \beta, \beta), (1, \beta, \beta), (1, \beta, 1-\beta); \beta = 0, 1\},\end{cases}$$

出发不能转移到 $\tilde{X}$ 外面，这一点对理解 $c(u, \tilde{\eta}, A), u \in S, \tilde{\eta} \in \tilde{X}, A \subset Y$ 的定义有帮助。我们令

$$(3.2)\qquad c(u, \tilde{\eta}, A) \triangleq \sum_{y\in A} c(u, \tilde{\eta}, y)$$

其中 $c(u,\tilde{\eta},y), u \in S, \tilde{\eta} = (\xi, \eta, \zeta) \in \tilde{X}, y = (\alpha, \beta, \gamma) \in Y$ 如下定义：

$$(3.3)\qquad c(u, (\xi, \eta, \zeta), (1, \beta, 1-\beta)) \triangleq \begin{cases} c(u, \eta) - c(u, \eta) \wedge c(u, \zeta), & \eta(u) = \zeta(u) = 1-\beta, \\ c(u, \zeta) - c(u, \eta) \wedge c(u, \zeta), & \eta(u) = \zeta(u) = \beta. \end{cases}$$

$$(3.4)\qquad c(u, (\xi, \eta, \zeta), (0, \beta, \beta)) \triangleq \begin{cases} c(u,\eta) \wedge c(u,\zeta), & \xi(u) = 0, \eta(u) = \zeta(u) = 1-\beta. \\ \delta(u,\xi), & \xi(u) = 1, \eta(u) = \zeta(u) = \beta, \\ c(u,\eta)\varepsilon(u, (\xi,\eta,\zeta)), & \xi(u) = 1, \eta(u) = 1-\beta, \zeta(u) = \beta, \\ c(u,\zeta)\varepsilon(u,(\xi,\eta,\zeta)), & \xi(u) = 1, \eta(u) = \beta, \zeta(u) = 1-\beta, \end{cases}$$

其中

(3.5) $\varepsilon(u,(\xi,\eta,\zeta))$

$$\triangleq\begin{cases}\dfrac{\delta(u,\ \xi)}{c(u,\eta)+c(u,\zeta)}, & 若\ c(u,\eta)+c(u,\zeta)>0,\\ 0, & 若\ c(u,\eta)+c(u,\zeta)=0.\end{cases}$$

(3.6) $c(u,(\xi,\eta,\zeta),(1,\beta,\beta))$

$$\triangleq\begin{cases}c(u,\eta)\wedge c(u,\zeta), & \xi(u)=1,\eta(u)=\zeta(u)=1-\beta\\ c(u,\eta)[1-\varepsilon(u,(\xi,\eta,\zeta))], & \xi(u)=1,\eta(u)=1-\beta,\\ & \zeta(u)=\beta,\\ c(u,\zeta)[1-\varepsilon(u,(\xi,\eta,\zeta))], & \xi(u)=1,\eta(u)=\beta,\\ & \zeta(u)=1-\beta,\\ \beta(u,\xi)-|c(u,\eta)-c(u,\zeta)|, & \xi(u)=0,\\ & \eta(u)=\zeta(u)=\beta.\end{cases}$$

(3.7) $c(u,(\xi,\eta,\zeta),(\alpha,\beta,\gamma))=0$，其它。

4. 定理 设 $c(\cdot,\cdot)$ 是满足定理 1.2.7 条件的自旋变相速度函数，$c(u,\ \tilde{\eta},\ A)$，$u\in S$，$\tilde{\eta}\in\tilde{X}$，$A\subset Y$ 为第 3 目所定义。在 $\mathscr{D}(\tilde{X})$ 上按第一章 § 2 ((1.2.2.6)) 用 $c(u,\ \tilde{\eta},\ A)$ 定义算子 $\hat{\Omega}$，即 $\forall f\in\mathscr{D}(\tilde{X})$，令

(4.1) $$(\hat{\Omega}f)(\tilde{\eta})\triangleq\sum_{u\in S}\int_Y c(u,\ \tilde{\eta},\ dy)[f(y\times\tilde{\eta}_{S\setminus u})-f(\tilde{\eta})].$$

则 (i) 存在 $C_b(\tilde{X})$ 上一个唯一的马氏半群 $\{\hat{S}(t):t\geqslant 0\}$ 以 $\hat{\Omega}$ 的闭包为无穷小母元，从而决定一个以 $\tilde{X}$ 为状态空间的转移概率函数 $\hat{p}(t,\ \tilde{\eta},\ A)$，$t\geqslant 0$，$\tilde{\eta}\in\tilde{X}$，$A\in\mathscr{B}_{\tilde{X}}$ 满足

(4.2) $$\hat{S}(t)f(\tilde{\eta})=\int\hat{p}(t,\ \tilde{\eta},\ d\xi)f(\xi),\ f\in C_b(\tilde{X}).$$

以一个以 $\hat{p}(t,\ \tilde{\eta},\ A)$ 为转移概率，以 $\tilde{X}$ 为状态空间的马氏过程 $\{\tilde{\eta}_t:t\geqslant 0\}$，$\tilde{\eta}_t=(\xi_t,\eta_t,\zeta_t)$。

(ii) 设 $\{S_1(t):t\geqslant 0\}$，$\{\xi_t:\ t\geqslant 0\}$ 分别是由 $c_1(\cdot,\cdot)$ 决定的马氏半群及马氏过程；$\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是由 $c(\cdot,\cdot)$ 决定的

马氏半群；$\{\eta_t:t\geqslant 0\}$，$\{\zeta_t:t\geqslant 0\}$ 是由 $c(\cdot,\cdot)$ 决定的两个自旋变相过程，$\{\tilde{S}(t):t\geqslant 0\}$ 是由 $\{\eta_t:t\geqslant 0\}$，$\{\zeta_t:t\geqslant 0\}$ 按基本耦合构成的过程 $\{(\eta_t,\zeta_t):t\geqslant 0\}$ 的马氏半群；则 $\{\hat{S}(t):t\geqslant 0\}$ 是 $\{S_1(t):t\geqslant 0\}$，$\{\tilde{S}(t):t\geqslant 0\}$ 按下列方式的耦合：若 $f\in C_b(\tilde{X})$ 仅依赖于 ξ，即 $\exists g\in C_b(X)$ 使 $f(\xi,\eta,\zeta)=g(\xi)$，则

(4.3) $\qquad (\hat{\Omega}f)(\xi,\eta,\zeta)=\Omega_1 g(\xi),\ f\in\mathscr{D}(\tilde{X}),$

(4.4) $\qquad (\hat{S}(t)f)(\xi,\eta,\zeta)=(S_1(t)g)(\xi),\ f\in C_b(\tilde{X}),t\geqslant 0;$

若 $f\in C_b(\tilde{X})$ 仅依赖于 (η,ζ)，即 $\exists g\in C_b(X\times X)$ 使 $f(\xi,\eta,\zeta)=g(\eta,\zeta)$

(4.5) $\qquad (\hat{\Omega}f)(\xi,\eta,\zeta)=(\tilde{\Omega}g)(\eta,\zeta),\ f\in\mathscr{D}(\tilde{X}),$

(4.6) $\qquad (\hat{S}(t)f)(\xi,\eta,\zeta)=(\tilde{S}(t)g)(\eta,\zeta),\ f\in C_b(\tilde{X}),t\geqslant 0,$

其中 $\tilde{\Omega}$ 为 $c_i(\cdot,\cdot)=c(\cdot,\cdot),i=1,2$，按基本耦合方式构成的耦合算子。

(iii) 以 $\{\hat{S}(t):t\geqslant 0\}$ 为马氏半群的马氏过程 $\{(\xi_t,\eta_t,\zeta_t):t\geqslant 0\}$ 具有下列性质：$\forall(\xi,\eta,\zeta)\in\tilde{X},\forall t\geqslant 0,$

(4.7) $\qquad P_{(\xi,\eta,\zeta)}(\{|\eta_t(u)-\zeta_t(u)|\leqslant\xi_t(u),u\in S\})=1,$

证. 我们将分若干步完成本定理的证明。

1° 为了证明 $\{\hat{S}(t):t\geqslant 0\}$ 的存在，证 $c(u,\tilde{\eta},A)$ 满足定理1.2.5的条件。首先由于 $c(u,\tilde{\eta},y)\geqslant 0$，$u\in S$，$\tilde{\eta}\in\tilde{X}$，$y\in Y$，由(3.2)知 $c(u,\tilde{\eta},A)$ 满足(1.2.2.1)，其次对给定的 $u\in S$，$y=(\alpha,\beta,\gamma)$，(3.3)—(3.7) 各式右端都是 $\tilde{\eta}=(\xi,\eta,\zeta)$ 的连续函数，而且(3.3)—(3.7) 的诸条件集(例如$\{(\xi,\eta,\zeta):\xi(u)=1,\eta(u)=1-\beta,\zeta(u)=\beta\}$ 等)都是柱集(因而它们的示性函数都是 $\tilde{\eta}=(\xi,\eta,\zeta)$的连续函数)，所以由(3.3)—(3.7)知 $c(u,\cdot,y)\in C_b(\tilde{X})$，从而由 (3.2) 知 $\forall u\in S$，$\tilde{\eta}\to c(u,\tilde{\eta},\cdot)$ 是 $\tilde{X}$ 到 $\mathscr{M}(Y)$ 中的连续映射，即 $c(u,\tilde{\eta},A)$满足(1.2.2.2)。第三，依次检查 (3.3)—(3.7) 可知 $c(u,\tilde{\eta},\{\tilde{\eta}(u)\})=c(u,\tilde{\eta},\tilde{\eta}(u))=0$，即 $c(u,\tilde{\eta},A)$ 满足(1.2.2.3)。

今再验证: $c(u, \tilde{\eta}, A)$ 满足(1.2.3.1)及(1.2.5.1)。

由假设及引理2知 $c(u,\cdot)$, $\beta(u,\cdot)$, $\delta(u,\cdot)$, $u\in S$, 一致有界，且由 (3.5) 知 $\varepsilon(u, \tilde{\eta})\in[0,1]$, $u\in S$, $\tilde{\eta}\in\tilde{X}$, 所以由 (3.2)—(3.7) 知 (注意当 $|A|\geqslant 2$ 时 $c_A=\sup\{c(A,\tilde{\eta},Y^A):\tilde{\eta}\in\tilde{X}\}=0$)

$$\sup\left\{\sum_{A\ni u} c_A : u\in S\right\}=\sup\{c_{\{u\}}:u\in S\}$$

$$=\sup\{c(u,\tilde{\eta},Y):u\in S,\tilde{\eta}\in\tilde{X}\}<\infty,$$

即 $c(u, \tilde{\eta}, A)$ 满足(1.2.3.1)。

为了验证(1.2.5.1),我们先验证: $\forall\tilde{\eta}=(\xi,\eta,\zeta)\in\tilde{X}$,

$$\forall y=(\alpha,\beta,\gamma), y'=(\alpha',\beta',\gamma')\in Y,\ u\neq v,$$

有

$$(4.8)\qquad |c(u,\tilde{\eta}_{S\setminus v}\times y,y')-c(u,\tilde{\eta},y')|\leqslant 3\Delta_{c(u,\cdot)}(v).$$

注意 $(\tilde{\eta}_{S\setminus v}\times y)(u)=\tilde{\eta}(u)$ ($\because u\neq v$) 及 $c(u,\tilde{\eta},y')$ 是由 $\tilde{\eta}(u)$ 与 y' 的关系而决定的，所以 $c(u,\tilde{\eta},y'), c(u,\tilde{\eta}_{S\setminus v}\times y,y')$的定义方式是相同的.于是由不等式

$$|a_1\wedge b_1-a_2\wedge b_2|\leqslant|a_1-a_2|+|b_1-b_2|$$

知,当 $c(u,\tilde{\eta},y')$ 按(3.3)、(3.7)及(3.4)、(3.6)的第一式定义时,(4.8)成立。当 $c(u,\tilde{\eta},y')$ 按(3.4)第二式、(3.6)第四式定义时,由(2.4)知(4.8)成立。由于对称性,显然对(3.4)的第三、四式的定义方式，验证(4.8)的办法相同,同样对(3.6)的第二、三式，验证(4.8)的办法相同。所以为了验证(4.8)，只剩下验证(3.4)的第三式及(3.6)式的第二式两种情形。

考虑(3.4)第三式的情形,此时

$$c(u,(\xi,\eta,\zeta),(\alpha',\beta',\gamma'))=c(u,\eta)\varepsilon(u,(\xi,\eta,\zeta))$$

若 $c(u,\eta)+c(u,\zeta)=0$, 则 $c(u,\eta)=0$, 由(3.5)知

$$|c(u,\tilde{\eta}_{S\setminus v}\times y,y')-c(u,\tilde{\eta},y')|$$

$$- c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta)\varepsilon(u, \bar{\eta}_{S\setminus v} \times y)$$
$$\leqslant |c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta) - c(u, \eta)| \leqslant \Delta_{c(u,\cdot)}(v).$$

若 $c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta) + c(u, \zeta_{S\setminus v} \times \gamma) = 0$，类似地可得上述不等式，因而(4.8)对上述两种情形成立．所以以下设

$$c(u, \eta) + c(u, \zeta) > 0,$$
$$c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta) + c(u, \zeta_{S\setminus v} \times \gamma) > 0.$$

令 $H \triangleq [c(u,\eta_{S\setminus v} \times \beta) + c(u,\zeta_{S\setminus v} \times \gamma)]^{-1}[c(u,\eta)+c(u,\zeta)]^{-1}$，则由(3.4)第三式及(3.5)得

$$\begin{aligned}
&|c(u, \bar{\eta}_{S\setminus v} \times y, y') - c(u, \bar{\eta}, y')| \\
&\quad\leqslant H|c(u,\eta_{S\setminus v} \times \beta)[\delta(u,\xi_{S\setminus v} \times \alpha) - \delta(u,\xi)]c(u,\eta)| \\
&\qquad + H|[c(u,\eta_{S\setminus v} \times \beta) - c(u,\eta)]\delta(u,\xi_{S\setminus v} \times \alpha)c(u,\zeta)| \\
&\qquad + H|c(u, \eta)\delta(u, \xi_{S\setminus v} \times \alpha)[c(u,\xi_{S\setminus v} \times \gamma) - c(u,\zeta)]| \\
&\qquad + H|c(u,\eta)[\delta(u,\xi_{S\setminus v} \times \alpha) - \delta(u,\xi)]c(u,\zeta_{S\setminus v} \times \gamma)| \\
&\quad\leqslant \Delta_{\delta(u,\cdot)}(v) \cdot Hc(u, \eta)[c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta) + c(u,\zeta_{S\setminus v} \times \gamma)] \\
&\qquad + \Delta_{c(u,\cdot)}(v) \cdot H\delta(u,\xi_{S\setminus v} \times \alpha)[c(u,\eta) + c(u,\zeta)] \\
&\quad\leqslant \Delta_{\delta(u,\cdot)}(v) + \Delta_{c(u,\cdot)}(v).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

总之，在(3.4)第三式的情形下，由(2.4)有

$$\begin{aligned}
|c(u, \bar{\eta}_{S\setminus v} \times y, y') - c(u, \bar{\eta}, y')| &\leqslant \Delta_{c(u,\cdot)}(v) \\
&\quad + \Delta_{\delta(u,\cdot)}(v) \leqslant 2\Delta_{c(u,\cdot)}(v).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

再来考虑(3.6)的第二式的情形．注意在(4.9)中已证明：当 $v \neq u$ 时有

$$\begin{aligned}
&|c(u,\eta_{S\setminus v} \times \beta)\varepsilon(u, \bar{\eta}_{S\setminus v} \times y) - c(u, \eta)\varepsilon(u, \bar{\eta})| \\
&\qquad \leqslant \Delta_{c(u,\cdot)}(v) + \Delta_{\delta(u,\cdot)}(v)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

于是在(3.6)第二式的情形，由(4.11)、(2.4)有

$$\begin{aligned}
&|c(u, \bar{\eta}_{S\setminus v} \times y, y') - c(u, \bar{\eta}, y')| \\
&\quad\leqslant |c(u, \eta_{S\setminus v} \times \beta) - c(u, \eta)| \\
&\qquad + |c(u,\eta_{S\setminus v} \times \beta)\varepsilon(u,\bar{\eta}_{S\setminus v} \times y) - c(u,\eta)\varepsilon(u, \bar{\eta})| \\
&\quad\leqslant 2\Delta_{c(u,\cdot)}(v) + \Delta_{\delta(u,\cdot)}(v) \leqslant 3\Delta_{c(u,\cdot)}(v).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

综合以上讨论即得(4.8)。

由(1.2.4.1)及(4.8)知

$$c_{\{u\}}(v) = \sup\left\{\sum_{y'\ni y}|c(u,\tilde{\eta}_{S\setminus v}\times y,y') - c(u,\tilde{\eta},y')|:\tilde{\eta}\in\tilde{X},\ y\in Y\right\}$$

$$\leqslant 3|Y|\Delta_{c(u,\cdot)}(v)$$

而当 $|A|\geqslant 2$ 时 $c_A(v)=0$，于是由(1.2.4.5)及 $c(u,\cdot)$ 的变差一致可和

$$M = \sup\left\{\sum_{A\ni u}\sum_{v\neq u}c_A(v):u\in S\right\}$$

$$\leqslant 3|Y|\sup_u|||c(u,\cdot)|||<\infty,$$

即(1.2.5.1)成立。故由定理 1.2.5 知 $\{\hat{S}(t):t\geqslant 0\}$ 存在且(i)获证。

2° 往证(ii)的(4.3)及(4.4)。设 $f\in\mathscr{D}(\tilde{X})$ 且 $\exists g\in C_b(X)$ 使 $\forall\tilde{\eta}=(\xi,\eta,\zeta)\in\tilde{X}$，$f(\xi,\eta,\zeta)=g(\xi)$，于是由(4.1)有

$$(4.13)\qquad (\hat{\Omega}f)(\tilde{\eta}) = \sum_{u\in S}[g({}_u\xi)-g(\xi)] \cdot\sum_{(1-\xi(u),\beta,\gamma)\in Y}c(u,\tilde{\eta},(1-\xi(u),\beta,\gamma))$$

因此要想得到(4.3)，只需验证

$$(4.14)\qquad \alpha(u,\tilde{\eta})\triangleq\sum_{(1-\xi(u),\beta,\gamma)\in Y}c(u,\tilde{\eta},(1-\xi(u),\beta,\gamma)) = c_1(u,\xi).$$

当 $\xi(u)=1$ 时，由(4.14)（$\alpha(u,\tilde{\eta})$ 的定义）及(3.1)，(3.4)，(3.5)，(1.2)，(1.3)知

$$\alpha(u,\tilde{\eta}) = c(u,\tilde{\eta},(0,0,0)) + c(u,\tilde{\eta},(0,1,1))$$

$$=\begin{cases}\delta(u,\xi), & \eta(u)=\zeta(u)\\ [c(u,\eta)+c(u,\zeta)]\varepsilon(u,\tilde{\eta})=\delta(u,\xi), & \eta(u)\neq\zeta(u)\end{cases}$$

$$= c_1(u, \xi)$$

当 $\xi(u) = 0$ 时，由于 $\tilde{\eta} = (\xi, \eta, \zeta) \in \widetilde{X}$，所以 $\eta(u) = \zeta(u)$. 于是由 $\alpha(u, \tilde{\eta})$ 的定义及(3.6),(3.3),(1.3)知

$$\begin{aligned}
\alpha(u, \tilde{\eta}) &= c(u, \tilde{\eta}, (1, 1, 0)(+ c(u, \tilde{\eta}, (1, 0, 1)) \\
&\quad + c(u, \tilde{\eta}, (1, \eta(u), \eta(u))) \\
&= c(u, \eta) + c(u, \zeta) - 2c(u, \eta) \wedge c(u, \zeta) \\
&\quad + \beta(u, \xi) - |c(u, \eta) - c(u, \zeta)| \\
&= \beta(u, \xi) = c_1(u, \xi)
\end{aligned}$$

故(4.14)成立,从而由(4.13)知(4.3)成立. 仿定理 2.3(ii) 的证明可得 (4.4).

3° 往证 (ii) 的(4.5),(4.6).设 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{X})$且 $\exists g \in C_b(X^2)$ 使 $f(\xi, \eta, \zeta) = g(\eta, \zeta)$ 对任何 $\tilde{\eta} = (\xi, \eta, \zeta) \in \widetilde{X}$ 成立。于是由(4.1)有 (设 $y = (\alpha, \beta, \gamma)$!)

$$\begin{aligned}
(\hat{\Omega} f)(\tilde{\eta}) &= \sum_{u \in S} \sum_{y \in Y} c(u, \tilde{\eta}, y)[g(\eta_{S\setminus u} \times \beta, \zeta_{S\setminus u} \times \gamma) \\
&\quad - g(\eta, \zeta)] = \sum_{u \in S} \{[g({}_u\eta, \zeta) - g(\eta, \zeta)] \\
&\quad \cdot \sum_{\alpha} c(u, \tilde{\eta}, (\alpha, 1 - \eta(u), \zeta(u))) \\
&\quad + [g(\eta, {}_u\zeta) - g(\eta, \zeta)] \\
&\quad \cdot \sum_{\alpha} c(u, \tilde{\eta}, (\alpha, \eta(u), 1 - \zeta(u))) \\
&\quad + [g({}_u\eta, {}_u\zeta) - g(\eta, \zeta)] \\
&\quad \cdot \sum_{\alpha} c(u, \tilde{\eta}, (\alpha, 1 - \eta(u), 1 - \zeta(u)),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $\sum_{\alpha}$ 中的 α 遍历使 $(\alpha, \cdot, \cdot) \in Y$ 成立的 $\{0, 1\}$ 中的元，因此要证 (4.15)，在于算出当 $\eta(u) \neq \zeta(u)$，$\eta(u) = \zeta(u)$ 时，(4.15) 中 $[g({}_u\eta, \zeta) - g(\eta, \zeta)]$，$[g(\eta, {}_u\zeta) - g(\eta, \zeta)]$，$[g({}_u\eta,$

${}_u\zeta) - g(\eta,\zeta)]$ 的系数.

当 $\eta(u) \neq \zeta(u)$时,由于$(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\eta} \in \widetilde{X}$,必有 $\xi(u) = 1$,而 $1 - \eta(u) = \zeta(u)$. 故由(3.3)—(3.7)知

$g({}_u\eta,\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\tilde{\eta},(0,\zeta(u),\zeta(u))) + c(u,\tilde{\eta},(1,\zeta(u),\zeta(u)))$$
$$= c(u,\eta)\varepsilon(u,\tilde{\eta}) + c(u,\eta)[1-\varepsilon(u,\tilde{\eta})] = c(u,\eta),$$

$g(\eta,{}_u\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\zeta)\varepsilon(u,\tilde{\eta}) + c(u,\zeta)[1-\varepsilon(u,\tilde{\eta})] = c(u,\zeta),$$

$g({}_u\eta,{}_u\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\tilde{\eta},(1,1-\eta(u),1-\zeta(u))) = 0.$$

当 $\eta(u) = \zeta(u)$ 时, 由于 $\tilde{\eta} = (\xi, \eta, \zeta) \in \widetilde{X}$, $\xi(u)$ 可以是 0 或 1,且 $1 - \eta(u) \neq \zeta(u)$. 故由(3.3)—(3.7)知

$g({}_u\eta,\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\tilde{\eta},(1,1-\eta(u),\eta(u)))$$
$$= c(u,\eta) - c(u,\eta)\wedge c(u,\zeta),$$

$g(\eta,{}_u\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\tilde{\eta},(1,\eta(u),1-\eta(u)))$$
$$= c(u,\zeta) - c(u,\eta)\wedge c(u,\zeta),$$

$g({}_u\eta,{}_u\zeta) - g(\eta,\zeta)$ 的系数

$$= c(u,\tilde{\eta},(0,1-\eta(u),1-\eta(u)))$$
$$+ c(u,\tilde{\eta},(1,1-\eta(u),1-\eta(u)))$$
$$= c(u,\eta)\wedge c(u,\zeta).$$

将以上计算结果代入(4.15)并注意 $\tilde{\Omega}$ 的定义即得(4.5). 仿定理2.3(ii) 的证明可得(4.6).

4° 由于 $\{(\xi_t,\eta_t,\zeta_t):t \geq 0\}$ 以 $\widetilde{X}$ 为状态空间,所以(4.7)自然成立. □

5. 定理 沿用定理 4 的假设及记号. 若 $\{\xi_t:t \geq 0\}$ 遍历,则 $\{\eta_t:t \geq 0\}$ 遍历,从而 $\mathscr{I}(\eta_t)$ 为单元集.

证. 记 $\hat{S}(t)$, $\tilde{S}(t)$, $S_1(t)$, $S(t)$ 所决定的概率分布分别为 $\hat{P}_{(\xi,\eta,\zeta)}$, $\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}$, $P_\xi^{(1)}$, P_η. 若 $\{\xi_t: t\geqslant 0\}$ 遍历,则由引理 2(iv) 知 $\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$, $\mu S_1(t)\Rightarrow\nu_0$.

由命题 1.4.3 知 $\mathscr{I}(\eta_t)\neq\phi$, 于是要证定理只需证: $\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$, $\nu\in\mathscr{I}(\eta_t)$有 $\mu S(t)\Rightarrow\nu$. 而由附录引理 3.9 知只需证:

(5.1) $\quad\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\mu S(t)(A_\Lambda)\to\nu(A_\Lambda)$(当 $t\to\infty$),

其中 $A_\Lambda\triangleq\{\eta\in X:\eta(u)=1,\ u\in\Lambda\}$. 而由定理 4, 定理 2.3 知

$$
\begin{aligned}
&|\mu S(t)(A_\Lambda)-\nu(A_\Lambda)|=|\mu S(t)(A_\Lambda)-\nu S(t)(A_\Lambda)|\\
&=\left|\int\tilde{S}(t)[I_{A_\Lambda\times X}(\eta,\zeta)-I_{X\times A_\Lambda}(\eta,\zeta)](\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\right|\\
&\leqslant\int|\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(\eta_t(u)=1,\forall u\in\Lambda)\\
&\quad-\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(\zeta_t(u)=1,\forall u\in\Lambda)|(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&=\int|\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(\eta_t(u)=1,\ \forall u\in\Lambda;\zeta_t(v)\neq1,\ \exists v\in\Lambda)\\
&\quad-\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(\eta_t(v)\neq1,\ \exists v\in\Lambda;\zeta_t(u)=1,\\
&\quad\forall u\in\Lambda)|(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&\leqslant2\sum_{u\in\Lambda}\int\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(\eta_t(u)\neq\zeta_t(u))(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&=2\sum_{u\in\Lambda}\int\tilde{P}_{(\eta,\zeta)}(|\eta_t(u)-\zeta_t(u)|=1)(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&=2\sum_{u\in\Lambda}\int\hat{P}_{(\xi,\eta,\zeta)}(|\eta_t(u)-\zeta_t(u)|=1;\ |\eta_t(v)\\
&\quad-\zeta_t(v)|\leqslant\xi_t(v),\ \forall v\in S)(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&\leqslant2\sum_{u\in\Lambda}\int P_\xi^{(1)}(\xi_t(u)=1)(\mu\times\nu)(d\eta,d\zeta)\\
&=2\sum_{u\in\Lambda}P_\xi^{(1)}(\xi_t(u)=1)=2\sum_{u\in\Lambda}\delta_\xi S_1(t)(A_{\{u\}})
\end{aligned}
$$

$$\xrightarrow{(t\to\infty)} 2\sum_{u\in\Delta} \nu_0(A_{\{u\}}) = 0$$

其中 $\delta_\xi \in \mathscr{P}(X)$ 为负荷集中于 ξ 的概率测度。故(5.1)成立。□

§6 习题与补充

1. 试采取下列步骤证明定理 2.9:

(i) 设 (E,ρ) 是任一距离空间，$\mathscr{B}_E$ 为 E 的 Borel σ-代数，$\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是 $C_b(E)$ 上的马氏半群，$p(t,\eta,A)$，$t\geqslant 0$，$\eta\in E$，$A\in\mathscr{B}_E$ 是相应的转移函数。则 $\forall\nu\in\mathscr{P}(E)$，有

$$(1.1)\qquad \nu S(t)(A)=\int p(t,\eta,A)\nu(d\eta),\ \forall t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{B}_E.$$

(ii) 设 $\{S_i(t):\ t\geqslant 0\}\ i=1,2$ 为定理 2.9 的马氏半群，$\{\tilde{S}(t):t\geqslant 0\}$ 为由 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$ 按基本耦合构造的马氏半群。试应用(i)证明定理 2.9。

2. 设 S 为有限集，μ_i，$i=1,2$ 是 $X=\{0,1\}^S$ 上的正概率测度，且满足

$$(2.1)\qquad \mu_2(\xi\vee\eta)\mu_1(\xi\wedge\eta)\geqslant\mu_1(\xi)\mu_2(\eta),\ \xi,\eta\in X$$

其中 $\xi\vee\eta\triangleq\{\xi(u)\vee\eta(u):u\in S\}$，$\xi\wedge\eta\triangleq\{\xi(u)\wedge\eta(u):u\in S\}$，则

$$\mu_1\leqslant\mu_2$$

提示：定义 $c_i(u,\eta)\triangleq\mu_i({}_u\eta)/\mu_i(\eta)$，当 $\eta(u)=1$；$=1$，当 $\eta(u)=0$。然后应用定理 2.9 及有限不可约马链的遍历性。

3. (FKG 不等式)设 S 为有限集，μ 是 $X=\{0,1\}^S$ 上的正概率测度，且

$$(3.1)\qquad \mu(\eta\wedge\xi)\mu(\eta\vee\xi)\geqslant\mu(\eta)\mu(\xi),\ \eta,\xi\in X.$$

则对 X 上的任何不降函数 f,g 有

$$(3.2)\qquad \int f d\mu\int g d\mu\geqslant\int fg d\mu.$$

提示：令 $\mu_1 \triangleq \mu$，$\mu_2(\{\eta\}) \triangleq g(\eta)\mu(\{\eta\})/\int g d\mu$，应用习题 2。

4. 设 S 为可数集，$X=\{0,1\}^S$，μ_1，$\mu_2 \in \mathscr{P}(X)$。$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$(\mu_i)_\Lambda$ 表示 μ_i 在 $X(\Lambda)$ 的投影，即 $(\mu_i)_\Lambda(\{\xi\}) \triangleq \mu_i(\{\xi\} \times X(S \backslash \Lambda))$，$\xi \in X(\Lambda)$。

(i) 若 $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$(\mu_i)_\Lambda$，$i=1, 2$ 满足(2.1)，则 $\mu_1 \leqslant \mu_2$。

(ii) 若 $\mu=\mu_1=\mu_2$，且$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$，$\mu_\Lambda$ 满足(3.1)，则对 X 上的任何不降连续函数 f，g(3.2) 成立。

5. 设伊辛模型的交互作用势 $\Phi: \mathscr{S} \backslash \phi \to R_+$ 且当 $|A| \geqslant 3$ 时 $\Phi(A)=0$。$\mathscr{G}_{S,\Lambda}$，$\Lambda \ni \mathscr{S}$ 及 $\mu_{\Lambda,\zeta}, \Lambda \in \mathscr{S}$，$\zeta \in X(S \backslash \Lambda)$。如定义 2.3.3 所规定。试证：$\forall \mu \in \mathscr{G}_{S,\Lambda}$

$$\mu_{\Lambda,\theta} \leqslant \mu, \quad \mu \leqslant \mu_{\Lambda,1} \tag{5.1}$$

6. 设 $S=Z^d$，记 $e_i \triangleq (\delta_{i1},\cdots,\delta_{id}), e_{i+d} \triangleq -e_i, i=1,\cdots,d$ (因而 $N_0 \triangleq \{v \in Z^d: |v|=1\}=\{e_1,\cdots,e_{2d}\}$)，给定 $1 \leqslant k \leqslant 2d$，$\forall u \in Z^d$，$\eta \in \{0,1\}^{Z^d}$，定义

$$c(u,\eta) \triangleq \begin{cases} 1, & \eta(u)=1 \\ \lambda \max\ \{\eta(u+e_{i_1})\cdots\eta(u+e_{i_k}): 1 \leqslant i_1 \\ \qquad < \cdots < i_k\}, & \eta(u)=0 \end{cases}$$

试证与此模型相应的临界值 $\tilde{\lambda}_c$ 存在，且

$$\tilde{\lambda}_c \geqslant k\lambda_c^{(d)}$$

其中 $\lambda_c^{(d)}$ 为 d 维基本接触过程的临界值。

7. 设 $S=Z^1$，

$$c(u,\eta) \triangleq \begin{cases} 1 & \eta(u)=1, \\ \lambda\eta(u-1)\eta(u+1), & \eta(u)=0. \end{cases} \quad u \in S,\ \eta \leqslant \{0,1\}^S.$$

试仿例 3.5 的方法证明此模型的临界值 $\lambda_c=\infty$。

8. 试仿例 3.5 的方法证明一维基本接触模型的临界值 $\lambda_c^{(1)} \geqslant 1$。

9. 设 $c(u,\eta)$ 有势 V，且 $c(u,\cdot)$，$u \in S$，连续，一致有界且

变差一致可和，任给定 $\Lambda\in\mathscr{S}$，$\zeta\in X(S\backslash\Lambda)$，则以

$$c_\zeta^{(\Lambda)}(u,\eta)\triangleq\begin{cases}c(u,\eta_\Lambda\times\zeta), & u\in\Lambda,\\ 0, & u\notin\Lambda,\ \eta(u)=\zeta(u),\\ M(u), & u\notin\Lambda,\ \eta(u)\neq\zeta(u),\end{cases}$$

$M(u)\triangleq\sup\limits_\eta c(u,\eta)$，为速度函数的自旋变相过程存在。与它相应的马氏半群记作 $\{S_\zeta^{(\Lambda)}(t):t\geqslant 0\}$，试证：

$$\mu_{\Lambda,\zeta}S_\zeta^{(\Lambda)}(t)=\mu_{\Lambda,\zeta},\ t\geqslant 0, \tag{9.1}$$

其中 $\mu_{\Lambda,\zeta}$ 由定义 2.3.3 规定。$\forall f\in C_b(X)$，

$$S_\zeta^{(\Lambda)}(t)f(\eta\times\zeta)=\sum_{\xi\in X(\Lambda)}p_\zeta^{(\Lambda)}(t,\eta\times\zeta,\xi\times\zeta)f(\xi\times\zeta), \tag{9.2}$$

$$\eta,\ \zeta\in X(\Lambda),$$

其中 $p_\zeta^{(\Lambda)}(t,\eta\times\zeta,\xi\times\zeta)$ 为 $X(\Lambda)\times\{\zeta\}$ 上的 $Q_\zeta^{(\Lambda)}$-过程，其中 $Q_\zeta^{(\Lambda)}\triangleq(g_\zeta^{(\Lambda)}(\eta\times\zeta,\xi\times\zeta):\eta_1,\xi\in X(\Lambda))$，

$$(9.3)\begin{cases}g_\zeta^{(\Lambda)}(\eta\times\zeta,\xi\times\zeta)\triangleq\begin{cases}c_\zeta^{(\Lambda)}(u,\ \eta\times\zeta), & \xi={}_u\eta,\ u\in\Lambda,\\ 0, & \text{其它 } \xi\neq\eta,\ \eta,\xi\in X(\Lambda),\end{cases}\\ q_\zeta^{(\Lambda)}(\eta\times\zeta,\eta\times\zeta)\triangleq-\sum\limits_{u\in\Lambda}c_\zeta^{(\Lambda)}(u,\ \eta\times\zeta).\end{cases}$$

还有，若 $\mu_\zeta\in\mathscr{P}(X)$，$\mu_\zeta(X(\Lambda)\times\{\zeta\})=1$，则

$$\mu_\zeta S_\zeta^{(\Lambda)}(t)\Rightarrow\mu_{\Lambda,\zeta}\quad(t\to\infty). \tag{9.4}$$

10. 设 $S=Z^1$，$\delta\in[0,\ 1]$，

$$c(u,\eta)\triangleq\begin{cases}1-\delta, & \eta(u-1)\neq\eta(u)\neq\eta(u+1),\\ \delta, & \text{其它},\end{cases}$$

试证：(i) 当 $\delta\in\{0,1\}$ 时，相应的过程不遍历；(ii) 当 $\delta\in(0,1)$ 时，$c(u,\eta)$ 有势 V 且 $|\mathscr{G}(V)|=1$；(iii) 当 $\delta\in\left(0,\ \frac{3}{4}\right]$ 时，过程遍历。

提示：当 $\delta=0$ 时，$\{\nu_0,\ \nu_1\}\subset\mathscr{I}$，当 $\delta=1$ 时，令

$$\eta_0: \eta_0(u) \triangleq \begin{cases} 1, & u \text{ 为奇数}, \\ 0, & u \text{ 为偶数}, \end{cases} \quad u \in Z^1, \quad \eta_1 \triangleq 1 - \eta_0,$$

则 $\{\delta_{\eta_0}, \delta_{\eta_1}\} \subset \mathscr{I}$. $c(u, \eta)$有势可用第二章§2的条件验证，而 $|\mathscr{G}(V)| = 1$ 可应用定理 4.4 的注证明。

第四章 对偶及其应用

在无穷粒子马尔可夫过程的研究中，对偶 (Duality) 同样是一个很重要的技巧. 典型的情况是：对所研究的过程，通过对偶关系与另一个过程(称之为对偶过程)联系，使得原过程的问题转换成对偶过程的问题. 如果对偶过程比原过程简单，或者问题转换成一种有用的方式，那么转换了的问题可能比原问题易于处理，因而可能得到某些进展. 本章将首先介绍对偶的一般定义，给出在自旋变相过程研究中常用的两种对偶函数及相应的速度函数，证明基本对偶定理. 在 § 2 中讨论对偶定理对遍历性问题的初步应用，§ 3 讨论选举过程的不变测度集的构造与不变测度的吸引场. § 4 讨论接触过程的临界值.

§ 1 基本对偶定理

1. 定义 设 $\{\eta_t: t\geqslant 0\}$, $\{\zeta_t: t\geqslant 0\}$分别是以$(X,\mathscr{F})$, $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{F}})$ 为态空间的马尔可夫过程，$H(\eta,\zeta)$ 是 $X\times\tilde{X}$ 上有界实值 $\mathscr{F}\times\tilde{\mathscr{F}}$ 可测函数，如果对一切 $\eta\in X$, $\zeta\in\tilde{X}$ 有

$$E_\eta H(\eta_t,\zeta)=E_\zeta H(\eta,\zeta_t),\ t\geqslant 0, \tag{1.1}$$

其中 E_η, E_ζ 分别是 η_t, s_t 以 η, ζ 为初始状态的期望算子，则称 $\{\eta_t: t\geqslant 0\}$, $\{\zeta_t: t\geqslant 0\}$ 为关于H相互**对偶的过程.**

要研究一类马尔可夫过程的对偶理论，首先是选择对偶过程的态空间与对偶函数 H. 在自旋变相过程的情形下，对偶过程的态空间 $\tilde{X}$ 通常取

$$\bar{\mathscr{S}} \triangleq \{A \subset S \cup \{\infty\}: |A| < \infty\}$$

其中 ∞ 为任一不属于 S 的元，因而对偶过程是 $\bar{\mathscr{S}}$ 上的马链．在下面的例子中将要看到，点∞是有用的．为了使对偶计算较易处理，选择比较简单的对偶函数是重要的，目前，我们选择下列两个对偶函数：

$$(1.3)\quad H_1(\eta, A) \triangleq \begin{cases} \theta_{A\cap S}(\eta), & A \not\ni \infty, \\ -\theta_{A\cap S}(\eta), & A \ni \infty, \end{cases} \quad A \in \bar{\mathscr{S}},\ \eta \in X,$$

其中

$$(1.4)\qquad \theta_A(\eta) \triangleq \prod_{u \in A} (1 - \eta(u)),\ A \in \mathscr{S},\ \eta \in X;$$

及

$$(1.5)\quad H_2(\eta, A) \triangleq \begin{cases} \chi_{A\cap S}(\eta), & A \not\ni \infty, \\ -\chi_{A\cap S}(\eta), & A \ni \infty, \end{cases} \quad \eta \in X,\ A \in \bar{\mathscr{S}}$$

其中

$$\chi_A(\eta) = \prod_{A \in \mathscr{S}} (2\eta(u) - 1), A \in \mathscr{S},\ \eta \in X,$$

在(1.3)—(1.5)中，空集上的乘积理解为1.

对于 $H_1(\eta, A)$，考虑速度函数

$$(1.6)\quad c_1(u,\eta) \triangleq c(u) \Big[(1 - \eta(u)) + (2\eta(u) - 1) \cdot \sum_{A \in \bar{\mathscr{S}}} p(u, A) H_1(\eta, A)\Big],$$

对于 $H_2(\eta, A)$，考虑速度函数

$$(1.7)\ c_2(u, \eta) \triangleq \frac{c(u)}{2}\Big[1 - (2\eta(u) - 1) \sum_{A \in \bar{\mathscr{S}}} p(u, A) H_2(\eta, A)\Big],$$

其中

$$(1.8)\qquad c(u) \geqslant 0,\ \sup_u c(u) < \infty,$$

$$(1.9)\qquad p(u, A) \geqslant 0,\ b(u) \triangleq \sum_{A \in \bar{\mathscr{S}}} p(u, A) \leqslant 1,$$

$$(1.10)\qquad \sup_u c(u)\sum_{A\in\mathscr{S}} p(u,A)|A| < \infty$$

2. 例 (a) 选举模型

$$(2.1)\quad c(u,\eta)=\begin{cases}\sum_v p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ \sum_v p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(u)=1,\end{cases}$$

其中

$$p(u,v)\geqslant 0,\ \sum_v p(u,v)=1.$$

既能写成(1.6)的形式,又能写成(1.7)的形式.

事实上,令

$$(2.2)\quad c(u)\triangleq 1,\ u\in S;\ p(u,F)\triangleq\begin{cases}p(u,v) & F=\{v\}\subset S,\\ 0, & \text{其它 } F\in\mathscr{S}.\end{cases}$$

即可验证 $c(u,\eta)=c_1(u,\eta)=c_2(u,\eta)$.

(*b*) 接触模型

$$(2.3)\quad c(u,\eta)\triangleq\begin{cases}\lambda\sum_{v\in S} p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=0,\\ 1, & \eta(u)=1,\end{cases}$$

$\lambda\geqslant 0$, $p(u,v)\geqslant 0$, $\sum_{v\in S} p(u,v)=1$, 能写成(1.6)的形式. 事实上, 令

$$(2.4)\qquad c(u)\triangleq 1+\lambda,\ u\in S;$$

$$p(u,F)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda}, & F=\phi,\\ \dfrac{\lambda}{1+\lambda}p(u,v), & F=\{u,v\},\ u,\ v\in S,\\ 0,\ \text{其它 } F\in\mathscr{S}.\end{cases}$$

即可验证 $c(u,\eta)=c_1(u,\eta)$.

(*c*) 反选举模型:

$$
(2.5)\quad c(u,\eta)\triangleq\begin{cases}\sum\limits_{v} p(u,v)(1-\eta(v)), & \eta(v)=0,\\ \sum\limits_{v} p(u,v)\eta(v), & \eta(u)=1,\end{cases}
$$

其中 $p(u, v)\geqslant 0$，$\sum\limits_{v\in S} p(u, v)=1$，$u\in S$，可以写成(1.7)的形式．事实上，令

$$
(2.6)\ c(u)\triangleq 1,\ u\in S;\ p(u,F)\triangleq\begin{cases}p(u,v), & F=\{v,\infty\},\ v\in S,\\ 0, & \text{其它 } F\in\mathscr{P},\end{cases}
$$

则可验证 $c(u,\eta)=c_2(u,\eta)$．

下面考虑与 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$ 相应的自旋变相过程的存在问题．

3. 引理 设 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$ 由(1.6)，(1.7)定义，则与 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$，相应的自旋变相过程存在．且对 $c_1(u,\eta)$ 来说，若 $p(u, A)=0$，$A\ni\infty$，则相应模型是吸引的．

证． 只需验证 $c_i(u,\eta)$，$i=1,2$，满足定理1.2.7的条件．首先注意(1.6)，(1.7)右边各项都是 η 的连续函数，且各项的绝对值组成的级数都

$$
\leqslant c(u)\left[1+\sum_{A\in\mathscr{P}} p(u,A)\right]\leqslant 2\sup_u c(u)<\infty.
$$

于是(1.6)，(1.7)右边的级数绝对收敛，且一致有界．因而 $c_i(u,\cdot)$，$u\in S$，是连续且一致有界的函数族．

其次易见 $\forall\eta\in X$，$A\in\mathscr{P}$，$v\in S$ 有

$$
(3.1)\quad H_1({}_v\eta, A)-H_1(\eta, A)=\begin{cases}0, & v\bar{\in} A,\\ (2\eta(v)-1)H_1(\eta, A\backslash v), & v\in A,\end{cases}
$$

$$
(3.2)\quad H_2({}_v\eta, A)-H_2(\eta, A)=\begin{cases}0, & v\bar{\in} A,\\ -2H_2(\eta, A), & v\in A,\end{cases}
$$

因而 $\forall v\neq u$ 有

$$\Delta_{c_i(u,\cdot)}(v) = \sup_{\eta} |c_i(u, {}_v\eta) - c_i(u,\eta)| \leqslant c(u) \sum_{A \ni v} p(u, A)$$

于是

$$\sup_u |||c_i(u,\cdot)||| \leqslant \sup_u \Big[c(u) \sum_{v \neq u} \sum_{A \ni v} p(u, A)$$

$$+ 2\|c_i(u,\cdot)\| \Big] \leqslant \sup_u c(u) \sum_{A \in \mathscr{S}} p(u, A) |A|$$

$$+ 2\sup_u \|c_i(u,\cdot)\| < \infty.$$

故由定理 1.2.7 知引理的前一结论成立.

关于 $c_1(u, \eta)$ 吸引的结论显然. □

记与 $c_i(u, \eta)$ 相应的 Feller 马氏半群为 $\{S_i(t): t \geqslant 0\}$, 自旋变相过程为 $\{\eta_{it}: t \geqslant 0\}$, 下面将讨论与 η_{it} 关于 $H_i(\eta, A)$ 对偶的马链(以 $\mathscr{S}$ 为态空间)的存在问题. 由 (1.1) 知自然要研究 $E_\eta H_i(\eta_{it}, A) = S_i(t) H_i(\cdot, A)(\eta)$, $A \in \mathscr{S}$. 由半群与其母元的关系, 自然要考虑 $\Omega_i H_i(\cdot, A)(\eta)$, 其中 Ω_i 是由 $c_i(u, \eta)$ 按 (1.2.7.2) 定义的算子,下面首先对它们进行一些计算,这就是

4. 引理 $\forall A \in \mathscr{S}$, $H_i(\cdot, A) \in \mathscr{D}(X) = \mathscr{D}(\Omega_i)$, 且 $\forall A \in \mathscr{S}, \eta \in X$

$$(4.1)\quad \Omega_1 H_1(\cdot, A)(\eta) = \sum_{B \in \mathscr{S}} \lambda_1(A, B)[H_1(\eta, B) - H_1(\eta, A)] - V(A) H_1(\eta, A)$$

其中

$$(4.2)\qquad V(A) \triangleq \sum_{u \in A \cap S} c(u)(1 - b(u)), \quad A \in \mathscr{S},$$

$$(4.3)\quad \lambda_1(A, B) \triangleq \sum_{u \in A \cap S} c(u) \sum_F{}' p(u, F) \geqslant 0, \quad B, A \in \mathscr{S},$$

其中 $\sum_F{}'$ 中的 F 满足下列要求: 若 $\infty \notin A \cap F$, 则 $(A \backslash u) \cup F = B$; 若 $\infty \in A \cap F$, 则 $((A \backslash u) \cup F) \backslash \infty = B$.

$\forall A \in \mathscr{S}$, $\eta \in X$, 有

$$(4.4)\ \Omega_2 H_2(\cdot, A)(\eta) = \sum_{B \in \mathscr{S}} \lambda_2(A, B)[H_2(\eta, B) - H_2(\eta, A)] - V(A)H_2(\eta, A),$$

其中

$$(4.5)\ \lambda_2(A, B) \triangleq \sum_{u \in A \cap S} c(u) \sum_{F: F \Delta (A \backslash u) = B} p(u, F) \geqslant 0, B, A \in \mathscr{S},$$

其中 $F\Delta(A\backslash u)$ 表示 F 与 $A\backslash u$ 的对称差.

证. 容易验证

$$(4.6)\ H_1(\eta, B)H_1(\eta, A) = \begin{cases} H_1(\eta, A \cup B), & \infty \notin A \cap B, \\ H_1(\eta, (A \cup B)\backslash \infty), & \infty \in A \cap B. \end{cases}$$

由(1.6),(2.1)及(4.6)即得

$$\begin{aligned}(4.7)\ \Omega_1 H_1(\cdot, A)(\eta) &= \sum_{u \in S} c_1(u, \eta)[H_1({}_u\eta, A) - H(\eta, A)] \\ &= \sum_{u \in A \cap S} c_1(u, \eta)(2\eta(u) - 1)H_1(\eta, A\backslash u) \\ &= \sum_{u \in A \cap S} c(u)\Big[-(1 - \eta(u)) \\ &\qquad + \sum_{B \in \mathscr{S}} p(u, B)H_1(\eta, B)\Big]H_1(\eta, A\backslash u) \\ &= \sum_{u \in A \cap S} c(u)(-H_1(\eta, A)) \\ &\qquad + \sum_{F \in \mathscr{S}} p(u, F)H_1(\eta, F)H_1(\eta, A\backslash u) \\ &= \sum_{B \in \mathscr{S}} \lambda_1(A, B)H_1(\eta, B) - \sum_{u \in A \cap S} c(u)H_1(\eta, A).\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1(A, B)$ 如(4.3)定义. 又由(4.3)得知

$$(4.8)\quad \sum_{B \in \mathscr{S}} \lambda_1(A, B) = \sum_{u \in B \cap S} c(u) \sum_{B \in \mathscr{S}} \sum_{F}{}' p(u, F)$$

$$= \sum_{u\in A\cap S} c(u)\sum_{F\in\mathscr{F}} p(u, F) = \sum_{u\in A\cap S} c(u)b(u)$$

$$= \sum_{u\in A\cap S} c(u) - V(A).$$

将 (4.8) 代入 (4.7) 即得 (4.1).

其次由 (1.7), (2.2), (4.5) 及

$$(4.9)\qquad H_2(\eta, A)H_2(\eta, B) = H_2(\eta, A\Delta B),\ A,\ B\in\mathscr{F},$$

得

$$(4.10)\ \Omega_2 H_2(\cdot, A)(\eta) = \sum_{u\in S} c_2(u, \eta)[H_2({}_u\eta, A) - H_2(\eta, A)]$$

$$= \sum_{u\in A\cap S} c(u)\Big[-H_2(\eta, A) + \sum_{B\in\mathscr{F}} p(u, B)H_2(\eta, B)H_2(\eta, A\backslash u)\Big]$$

$$= \sum_{u\in A\cap S} c(u)\Big[-H_2(\eta, A) + \sum_{F\in\mathscr{F}} p(u, F)H_2(\eta, F\Delta(A\backslash u))\Big]$$

$$= -\sum_{u\in A\cap S} c(u)H_2(\eta, A) + \sum_{B\in\mathscr{F}} \lambda_2(A, B)H_2(\eta, B).$$

再由 (4.5) 得

$$(4.11)\qquad \sum_{B\in\mathscr{F}} \lambda_2(A, B) = \sum_{u\in A\cap S} c(u)\sum_{B\in\mathscr{F}, F\Delta(A\backslash u)=B} p(u, F)$$

$$= \sum_{u\in A\cap S} c(u)b(u) = \sum_{u\in A\cap S} c(u) - V(A)$$

将 (4.11) 代入 (4.10) 即得 (4.4). □

由引理 4 可以想到：与 $\{\eta_{1t};\ t\geqslant 0\}$ 关于 $H_1(\eta, A)$ 对偶的马链(如果存在的话),应该是以

$$
(4.12)\quad q_i(A,B)\triangleq\begin{cases}\lambda_i(A,B), & B\neq A,\\ -\sum\limits_{B\neq A}\lambda_i(A,B)=-q_i(A), & B=A,\\ \qquad A,B\in\mathscr{S}, & i=1,2,\end{cases}
$$

为Q矩阵的Q过程，其中 $\lambda_i(A, B)$ 由(4.3)，(4.5)给出．为此我们先证此Q过程存在

5. 引理 以 (4.12) 定义的矩阵为Q矩阵（保守）的Q过程 $\{A_t^{(i)}: t\geqslant 0\}\ (i=1, 2)$ 存在、唯一、不断且

$$
(5.1)\qquad E_A|A_t^{(i)}\cap S|\leqslant|A\cap S|e^{\omega t},\quad A\in\mathscr{S},
$$

其中 E_A 表示相应于 $A_t^{(i)}$ 的分布 P_A，$A\in\mathscr{S}$，的期望算子，

$$
(5.2)\qquad \omega\triangleq\sup_u c(u)\sum_{F\in\mathscr{S}}p(u,F)[|F\cap S|-1].
$$

证． 由(4.12)，(4.2)，(4.5)并仿照(4.7)，(4.10)后两步的推导

$$
\begin{aligned}
(5.3)\qquad &\sum_{B\neq A}q_i(A,B)[|B\cap S|-|A\cap S|]\\
&=\sum_{B\in\mathscr{S}}\lambda_i(A,B)[|B\cap S|-|A\cap S|]\\
&=\sum_{u\in A\cap S}c(u)\sum_{B}\sum_{F}{}'p(u,F)[|B\cap S|\\
&\quad-|A\cap S|]\leqslant\sum_{u\in A\cap S}c(u)\sum_{F\in\mathscr{S}}p(u,F)\\
&\quad\cdot[|(F\cup(A\backslash u))\cap S|-|A\cap S|],
\end{aligned}
$$

其中 $\sum\limits_F{}'$ 中的 F:(i) 当 $i=1$ 时，满足 (4.3) 式下面的解释；(ii) 当 $i=2$ 时，$F\Delta(A\backslash u)=B$．而

$$
\begin{aligned}
|(F\cup(A\backslash u))\cap S|&\leqslant|F\cap S|+|(A\cap S)\backslash u|\\
&=|F\cap S|+|A\cap S|-1,
\end{aligned}
$$

故由(5.3)即得

$$(5.4)\quad \sum_{B\neq A} q_i(A,\ B)[|B\cap S| - |A\cap S|] \leqslant \omega|A\cap S|,$$

$$i=1,\ 2,\ A\in\bar{\mathscr{S}}$$

另一方面，由 (4.12), (4.8), (4.11), (1.9)

$$(5.5)\quad q_i(A) \leqslant \sum_{B\in\bar{\mathscr{S}}} \lambda_i(A,B) \leqslant \sum_{u\in A\cap S} c(u)$$

$$\leqslant \sup_u c(u)\cdot|A\cap S|,\ i=1,\ 2,\ A\in\bar{\mathscr{S}}$$

于是由 (5.4), (5.5) 有

$$(5.6)\begin{cases}\varphi(A) \triangleq (\sup_u c(u))|A\cap S| \geqslant q_i(A),\ i=1,\ 2,\ A\in\bar{\mathscr{S}}\\ \sum_{B\neq A} q_i(A,\ B)\varphi(B) \leqslant (\omega+q_i(A))\varphi(A).\end{cases}$$

由Q过程理论(见[4; 定理 (2.3.2) 及其证明])知以 $(q_i(A,\ B):\ A,\ B\in\bar{\mathscr{S}})$ 为Q矩阵的Q过程 $\{A_t^{(i)}:\ t\geqslant 0\}$ 存在唯一不断且

$$(5.7)\quad E_A\varphi(A_t^{(i)}) = \sum_{B\in\bar{\mathscr{S}}} p_i(t,\ A,\ B)\varphi(B) \leqslant e^{\omega t}\varphi(A)$$

其中 $p_i(t,\ A,\ B)$ 为 $A_t^{(i)}$ 的转移概率. 在 (5.7) 两边同时消去 $\sup_u c(u)$ 即得 (5.1). □

下面是对偶的基本定理.

6. 定理 设 $c_i(u,\ \eta),\ i=1,\ 2$ 为由 (1.6), (1.7) 定义的速度函数,其中 $c(u)$, $p(u,\ F)$ 满足 (1.8), (1.9), (1.10); $\{S_i(t):\ t\geqslant 0\}$ 为与 $c_i(u,\ \eta)$ 相应的马氏半群, $\{\eta_{it}:\ t\geqslant 0\}$ 是相应的自旋变相过程; $(q_i(A,\ B):A,\ B\in\bar{\mathscr{S}})$ 为 (4.12) 定义的Q矩阵, $\{A_{it}:t\geqslant 0\}$ 是相应的Q过程. 则 $\forall\eta\in X$, $A\in\bar{\mathscr{S}}$, $t\geqslant 0$ 有

$$(6.1)\quad E_\eta H_i(\eta_{it},\ A) = E_A\left[H_i(\eta, A_{it})\exp\left(-\int_0^t V(A_{is})ds\right)\right],$$

$$i=1,\ 2.$$

于是,当 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$ (即 $V(A)\equiv 0$) 时, 过程 $\{\eta_{it}:\ t\geqslant 0\}$ 与 $\{A_{it}:t\geqslant 0\}$ 关于 $H_i(\eta,\ A)$ 对偶.

证. 由于对 $i=1,\ 2$ 的证法完全一样, 因此在下面的证明

中，足码 i 略去不写.

1° 由定理 1.1.1 及 (4.1), (4.4), (4.12) 知

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_\eta H(\eta_t, A) &= S(t) \Omega H(\cdot, A)(\eta) \\
&= \sum_{B \neq A} q(A, B)[S(t)H(\cdot, B)(\eta) - S(t)H(\cdot, A)(\eta)] \\
&\quad - V(A)S(t)H(\cdot, A)(\eta)
\end{aligned}
$$

故 $E_\eta H(\eta_t, A)$, $A \in \bar{\mathscr{S}}$, 是方程组

$$
(6.2)\begin{cases} \dfrac{du_\eta(t, A)}{dt} = \sum\limits_{B \in \bar{\mathscr{S}}} q(A, B) u_\eta(t, B) - V(A) u_\eta(t, A), \\ u_\eta(0, A) = H(\eta, A), |u_\eta(t, A)]| \leqslant 1, \ A \in \bar{\mathscr{S}} \end{cases}
$$

的解. 因此问题在于证明 (6.1) 的右边也是 (6.2) 的解，且 (6.2) 的解唯一.

2° 今往证: (6.1) 的右边也是 (6.2) 的解. 首先注意 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 是随机连续(对 $\mathscr{S}$ 赋散拓扑)过程,因而由随机过程理论(例如参见 [1, § 3.3 定理 1], 不过那里的证明应作适当修改) 知它有一个可测修正,不妨仍用 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 表示. 于是对任何 $x \in R$ 来说, $\{s \in R: V(A_s) < X\} = \{s: A_s \in V^{-1}((-\infty, x))\}$ $a.e.P_A$ 是勒贝格可测集，从而 $V(A_s)$ 是 s 的勒贝格可测函数. 由此及 $V(A) \geqslant 0$ 知 $-\int_s^t V(A_r) dr$ $a.e.(P_A)$ 有意义且是 s 的连续上升函数,

$$
\begin{aligned}
(6.3)\ \int_0^t V(A_s) \exp\left(-\int_s^t V(A_r) dr\right) ds &= \exp\left(-\int_s^t V(A_r) dr\right)\Big|_0^t \\
&= 1 - \exp\left(-\int_0^t V(A_s) ds\right)
\end{aligned}
$$

记

$$
(6.4) \qquad v_\eta(t, A) \triangleq E_A H(\eta, A_t) \exp\left(-\int_0^t V(A_s) ds\right)
$$

则由 $\{A_t; t \geqslant 0\}$ 的时齐马氏性知

$$(6.5)\quad E_A\left[[H(\eta, A_t)V(A_s)\exp\left(-\int_s^t V(A_r)dr\right)\right]$$

$$= E_A\left[[V(A_s)E_A\left[H(\eta, A_t)\exp\left(-\int_s^t V(A_r)dr\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.|A_r; r \leqslant s\right]\right] = E_A\left[V(A_s)E_{A_s}\left[H(\eta, A_{t-s})\right.\right.$$

$$\left.\left.\exp\left(-\int_0^{t-s} V(A_r)dr\right)\right]\right]$$

$$= E_A[V(A_s)v_\eta(t-s, A_s)].$$

再由 (6.4), (6.3), (6.5) 知 $\forall A \in \mathscr{S}$

$$(6.6)\quad v_\eta(t, A) = E_A H(\eta, A_t) - \int_0^t E_A\left[H(\eta, A_t)V(A_s)\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left(-\int_s^t V(A_r)dr\right)\right]ds$$

$$= E_A H(\eta, A_t) - \int_0^t E_A[V(A_s)v_\eta(t-s, A_s)]ds$$

$$= E_A H(\eta, A_t) - \int_0^t E_A[V(A_{t-s})v_\eta(s, A_{t-s})]ds.$$

为了验证 $v_\eta(t, A)$ 是 (6.2) 的解,还要用到下列的

$$(6.7)\quad \frac{d}{dt} E_A f(A_t) = \sum_B q(A, B)E_B f(A_t),$$

其中 f 是 $\mathscr{S}$ 上的有界函数. 事实上,由于引理 5, $p(t, A, B)$, $A, B \in \mathscr{S}$ 满足向后方程,因此

$$\frac{d}{dt} E_A f(A_t) = \frac{d}{dt}\sum_{C\in\mathscr{S}} p(t, A, C)f(C) = \sum_{C\in\mathscr{S}}\frac{d}{dt} p(t, A, C)$$

$$\cdot f(C) = \sum_{C\in\mathscr{S}}\sum_{B\in\mathscr{S}} q(A, B)p(t, B, C)f(C)$$

$$= \sum q(A, B)\sum p(t, B, C)f(C)$$

$$= \sum_B q(A, B)E_B f(A_t).$$

由 (6.6), (6.7) 知 $\forall A\in\mathscr{S}$

$$\begin{aligned}\frac{dv_\eta(t,A)}{dt}&=\frac{d}{dt}E_AH(\eta,A_t)-E_A[V(A_0)v_\eta(t,A_0)]\\&\quad-\int_0^t\left\{\sum_B q(A,B)E_B[V(A_{t-s})v_\eta(s,A_{t-s})]\right\}ds\\&=\frac{d}{dt}E_AH(\eta,A_t)+\sum_B q(A,B)[v_\eta(t,B)\\&\quad-E_BH(\eta,A_t)]-V(A)v_\eta(t,A)\\&=\sum_B q(A,B)v_\eta(t,B)-V(A)v_\eta(t,A)\end{aligned}$$

再由 $v_\eta(0,A)=E_AH(\eta,A_0)=H(\eta,A)$ 及

$$|v_\eta(t,A)|\leqslant E_A\left|H(\eta,A_t)\exp\left(-\int_0^t V(A_s)ds\right)\right|\leqslant 1$$

知 $v_\eta(t,A)$, $A\in\mathscr{S}$ 是 (5.2) 的解.

3° 最后证明 (6.2) 的解唯一. 设 $\{u_\eta^{(i)}(t,A):A\in\mathscr{S}\}$, $i=1,2$ 是 (6.2) 的两个解. 令

$$u_\eta(t,A)\triangleq u_\eta^{(1)}(t,A)-u_\eta^{(2)}(t,A),\quad A\in\mathscr{S},$$

则由 $q(A,A)=-q(A)$ 有

$$(6.8)\qquad\begin{cases}\dfrac{du_\eta(t,A)}{dt}=\sum\limits_{B\neq A}q(A,B)u_\eta(t,B)-[V(A)\\\qquad+q(A)]u_\eta(t,A),\\u_\eta(0,A)=0,\ |u_\eta(t,A)|\leqslant 2,\ A\in\mathscr{S}.\end{cases}$$

两边取拉氏变换, 并记 $u_\eta(t,A)$ 的拉氏变式为 $\tilde{u}(\lambda,A)$, 则由 (6.8) 即得

$$(6.9)\qquad\tilde{u}(\lambda,A)=\sum_{B\neq A}\frac{q(A,B)}{\lambda+q(A)+V(A)}\tilde{u}(\lambda,B),$$

$$|\tilde{u}(\lambda,A)|\leqslant\frac{2}{\lambda},\quad A\in\mathscr{S}.$$

再由于 $(q(A,B):A,B\in\mathscr{S})$ 保守且它的 Q 过程唯一, 由 Q 过程理论知(见 [4, 定理 (2.5.16), (2.5.13)] 方程组

$$(6.10)\qquad \omega(\lambda, A)=\sum_{B\neq A}\frac{q(A, B)}{\lambda+q(A)}\omega(\lambda, B),$$

$$0\leqslant\omega(\lambda, A)\leqslant\frac{2}{\lambda},\ A\in\bar{\mathscr{S}}$$

只有零解，并且它的最大解可以下列迭代方式得到：若令

$$\omega^{(0)}\ (\lambda, A)=2/\lambda,$$

$$(6.11)\qquad \omega^{(n+1)}(\lambda, A)=\sum_{B\neq A}\frac{q(A, B)}{\lambda+q(A)}\omega^{(n)}(\lambda, B), n\geqslant 0,$$

则 $\omega^{(n)}(\lambda, A)$ 随 n 增加而下降趋于最大解．因而有

$$(6.12)\qquad \omega^{(n)}(\lambda, A)\downarrow 0,\ A\in\bar{\mathscr{S}}.$$

另一方面，由 (6.9) 可得

$$|\tilde{u}(\lambda, A)|\leqslant\sum_{B\neq A}\frac{q(A, B)}{\lambda+q(A)+V(A)}|\tilde{u}(\lambda, B)|,$$

$$|\tilde{u}(\lambda, A)|\leqslant\frac{2}{\lambda},\ A\in\bar{\mathscr{S}},$$

由 (6.11) 并应用数学归纳法容易证明：$\forall A\in\bar{\mathscr{S}}$, $n\geqslant 0$, $|\tilde{u}(\lambda, A)|\leqslant\omega^{(n)}(\lambda, A)$，于是由 (6.12) 即得 $|\tilde{u}(\lambda, A)|=0$, $\lambda>0$, $A\in\bar{\mathscr{S}}$，最后，由拉氏变换的唯一性定理及 $u_\eta(t, A)$ 是 t 的连续函数知 $u(t, A)=0$, $t\geqslant 0$, $A\in\bar{\mathscr{S}}$，因而 $u_\eta^{(1)}(t, A)=u^{(2)}(t, A)$, $t\geqslant 0$, $A\in\bar{\mathscr{S}}$，即 (6.2) 的解唯一．□

7. 推论 (i) 设 $c(u)$, $p(u, F)$, $u\in S$, $F\in\bar{\mathscr{S}}$ 按 (2.2) 定义，由此按 (4.12) 定义 $q_i(A, B)$, A, $B\in\bar{\mathscr{S}}$, $i=1, 2$，则由 (2.1) 决定的选举过程与 $(q_i(A, B): A, B\in\bar{\mathscr{S}})$ 过程关于 $H_i(\eta, A)$ 对偶，其中 $i=1, 2$.

(ii) 设 $c(u)$, $p(u, F)$, $u\in S$, $F\in\bar{\mathscr{S}}$ 按 (2.4) 定义，由此按 (4.12) 定义 $q_1(A, B)$, A, $B\in\bar{\mathscr{S}}$，则由 (2.3) 决定的接触过程与 $(q_1(A, B): A, B\in\bar{\mathscr{S}})$ 过程关于 $H_1(\eta, A)$ 对偶.

(iii) 设 $c(u)$, $p(u, F)$, $u\in S$, $F\in\bar{\mathscr{S}}$ 按 (2.6) 定义，由此按 (4.12) 定义 $q_2(A, B)$, A, $B\in\bar{\mathscr{S}}$，则由 (2.5) 决定的反选举

过程与 $(q_2(A, B): A, B \in \bar{\mathscr{S}})$ 过程关于 $H_2(\eta, A)$ 对偶.

证. 注意上述各情形中的 $V(A)$ 都等于零,于是由定理 6 即得推论. □

8. 注 如果定义

$$
(8.1) \quad \tilde{q}_i(A,B) \triangleq \begin{cases} q_i(A, B), & A, B \in \bar{\mathscr{S}}, A \neq B, \\ -\tilde{q}_i(A) = -\left[\sum_{B \neq A} q_i(A,B) + V(A)\right], \\ A \in \bar{\mathscr{S}}, & i = 1, 2 \end{cases}
$$

其中 $q_i(A, B)$, $V(A)$, A, $B \in \bar{\mathscr{S}}$, $A \neq B$, $i = 1, 2$ 分别由 (4.12) 及 (4.2) 定义, 则 $(\tilde{q}_i(A, B): A, B \in \bar{\mathscr{S}})$ 是一全稳定的非保守Q矩阵,当且仅当 $V(A) \equiv 0$ 时, 为保守Q矩阵. 由Q过程理论知 $(\tilde{q}_i(A, B): A, B \in \bar{\mathscr{S}})$ 过程存在. 如果记 $(q_i(A, B): A, B \in \bar{\mathscr{S}})$ 过程为 $(\{A_{it}: t \geqslant 0\}, \{P_A^{(i)}: A \in \bar{\mathscr{S}}\})$,则仿定理 6 的证 2° 可得

$$
(8.2) \quad \tilde{p}_i(t, A, B) \triangleq E_A^{(i)}[I_B(A_{it})e^{-\int_0^t V(A_{is})ds}], \quad A, B \in \bar{\mathscr{S}}
$$

满足

$$
(8.3) \quad \frac{d\tilde{p}_i(t, A, B)}{dt} = \sum_{C \in \bar{\mathscr{S}}} \tilde{q}_i(A, C)\tilde{p}_i(t, C, B), \quad A, B \in \bar{\mathscr{S}},
$$

这就是说 $\tilde{p}_i(t, A, B)$, A, $B \in \bar{\mathscr{S}}$ 是一满足向后方程的 $\tilde{Q}_i = (\tilde{q}_i(A, B): A, B \in \bar{\mathscr{S}})$ 过程. 而且由 (8.2) 易见

$$
(8.4) \quad E_A^{(i)}[H_i(\eta, A_{it})e^{-\int_0^t V(A_{is})ds}] = \tilde{E}_A^{(i)}[H_i(\eta, A_{it})], \quad A \in \bar{\mathscr{S}},
$$

其中 $\tilde{E}_A^{(i)}$ 表示由 $\tilde{p}_i(t, A, B)$ 构造的马氏过程的始于A的分布 $\tilde{P}_A^{(i)}$ 的期望算子. 于是由定理 6 知 $\{\eta_{it}: t \geqslant 0\}$ 与 $(\{A_{it}: t \geqslant 0\}, \{\tilde{P}_A^{(i)}: A \in \bar{\mathscr{S}}\})$ 关于 $H_i(\eta, A)$ 对偶.

9. 注 如果接触过程的定义中的随机矩阵 $P = (p(u, v): u, v \in S)$ 对称 (即 $p(u, v) = p(v, u)$, u, $v \in S$), 则接触过程限于 $X_0 \triangleq \left\{\eta \in X: \sum_{u \in S} \eta(u) < \infty\right\}$ 的部分 (即有限粒子系统上的接触

过程)就是它的对偶过程. 在这意义下,接触过程是**自对偶**的.

这一结论由下面两条引理即知其成立.

(*a*) **引理**. 设 $P=(p(u,v):u,v\in S)$对称,在 X_0 上,如下地定义矩阵:

$$(9.1) \qquad q(\eta,\zeta)\triangleq\begin{cases}c(u,\eta), & \zeta={}_u\eta,\\ 0, & \text{其它 } \zeta\neq\eta,\end{cases} \quad \eta,\ \zeta\in X_0$$

其中 $c(u,\eta)$ 为接触模型的速度函数.

$$(9.2) \qquad q(\eta)\triangleq -q(\eta,\eta)\triangleq\sum_{\substack{\zeta\in X_0\\ \zeta\neq\eta}}q(\eta,\zeta).$$

则 $Q=(q(\eta,\zeta):\eta,\zeta\in X_0)$ 过程唯一(因而不断).

如果在 X_0 与 $\mathscr{S}$ 之间建立下列的双射:

$$(9.3) \qquad \eta\in X_0\longleftrightarrow A_\eta\triangleq\{u\in S:\eta(u)=1\}\in\mathscr{S},$$

并令

$$(9.4) \qquad q(A_\eta,A_\zeta)\triangleq q(\eta,\zeta),\quad \eta,\zeta\in X_0,$$

则 $(q(A,B):A,B\in\mathscr{S})$ 即为接触过程的对偶过程的 Q 矩阵,这就是说,$(q(\eta,\zeta):\eta,\zeta\in X_0)$ 过程即接触过程的对偶过程.

证. 由接触模型的定义及 (9.1)—(9.4) 知当 $\eta\neq\zeta$ 时,

$$q(A_\eta,A_\zeta)=q(\eta,\zeta)=\begin{cases}1, & u\in A_\eta,\ A_\zeta=A_\eta\setminus\{u\},\\ \lambda\sum\limits_{v\in A_\eta}p(u,v), & u\notin A_\eta,A_\zeta=A_\eta\cup\{u\},\\ 0, & \text{其它 } A_\zeta\neq A_\eta.\end{cases}$$

再由推论 7(ii), (2.4), (4.12) 及 $p(u,v)=p(v,u)$ 知 $(q(A,B):A,B\in\mathscr{S})$ 即为接触过程关于 $H_1(\eta,A)$ 对偶的对偶过程的 Q 矩阵. 于是由引理 5 知由 (9.1), (9.2) 定义的矩阵的 Q 过程存在、唯一且不断. □

由引理 (*a*) 知: 要证开始所说的结论,只需证明

(*b*) **引理** 设 $P=(p(u,v):u,v\in S)$ 对称,则接触过程限

于 X_0 为(9.1)，(9.2)所定义的矩阵的 Q 过程.

证. 设 $S(t), t \geqslant 0, \Omega$ 为与接触模型相应的马氏半群及算子，$q(\eta, \zeta)$，$\eta, \zeta \in X_0$ 为 (9.1)，(9.2) 所定义，任取 $f \in \mathscr{D}(\Omega)$，$\eta \in X_0$，则由定理 2.5 知 $S(t)f \in \mathscr{D}(\Omega)$，$t \geqslant 0$，于是

$$
\begin{aligned}
\frac{dS(t)f(\eta)}{dt} &= (\Omega S(t)f)(\eta) \\
&= \sum_{u \in S} c(u, \eta)[S(t)f({}_u\eta) - S(t)f(\eta)] \\
&= \sum_{\zeta \in X_0 \setminus \eta} q(\eta, \zeta)[S(t)f(\zeta) - S(t)f(\eta)] \\
&= \sum_{\zeta \in X_0} q(\eta, \zeta)(S(t)f)(\zeta)
\end{aligned}
$$

再设 $p_0(t, \eta, \zeta)$，$\eta, \zeta \in X_0$，$t \geqslant 0$，为(9.1)，(9.2)定义的矩阵(保守)的 Q 过程，则由向后方程即得

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\zeta \in X_0} p_0(t, \eta, \zeta) f(\zeta)\right] = \sum_{\xi \in X_0} q(\eta, \xi)\left[\sum_{\zeta \in X_0} p_0(t, \xi, \zeta) f(\zeta)\right].$$

由于

$$S(0)f(\eta) = f(\eta) = \sum_{\zeta \in X_0} p_0(0, \eta, \zeta) f(\zeta), \ \eta \in X_0$$

及(9.1)，(9.2)定义的矩阵(保守)的 Q 过程唯一(因而此矩阵零流出)知

$$S(t)f(\eta) = \sum_{\zeta \in X_0} p_0(t, \eta, \zeta) f(\zeta), \ t \geqslant 0, \ \eta \in X_0.$$

再由 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $C_b(X)$ 中稠知上式 $\forall f \in C_b(X)$ 成立，因而对任何 $\mathscr{B}(X)$ 可测函数 f，有

$$\int p(t, \eta, d\zeta) f(\zeta) = \sum_{\zeta \in X_0} p_0(t, \eta, \zeta) f(\zeta). \ \eta \in X_0, t \geqslant 0,$$

其中 $p(t, \eta, A)$ 为接触过程的转移函数. 令 $f = I_{\{\zeta\}}$ 即得

$$p(t, \eta, \{\zeta\}) = p_0(t, \eta, \zeta), \ t \geqslant 0, \ \eta, \zeta \in X_0.$$

因而 $p(t, \eta, X_0) = 1$. □

引理 (b) 还附带地证明了：若 $p(u, v) = p(v, u)$ 则相应的接触过程限于 X_0 是一保守全稳定的 Q 过程，其 Q 矩阵由 (9.1)，(9.2) 定义.

§2 对遍历性的初步应用

本节将讨论定理 1.6 对遍历性的一些初步应用，对于选举模型和接触模型的进一步应用将在下两节分别讨论. 除特别声明外，本节结果对 §1 中所述的两种对偶都适用. 因此 $c_i(u, \eta)$, $H_i(\eta, A)$, $S_i(t)$ 等等中的足码将略而不写，并假定其中的 $c(u)$, $p(u, A)$, $u \in S$, $A \in \mathscr{S}$ 满足 (1.1.8)，(1.1.9) 及 (1.1.10)，设 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 是对偶过程，并定义

$$(0.1) \qquad \tau \triangleq \inf\{t > 0, A_t \in \{\phi, \{\infty\}\}\}.$$

为了更方便于应用，将 (1·6·1) 写成积分形式是适宜的. 这就是

1. 引理 设定理 1.6 的假设成立. 对于 $\mu \in \mathscr{P}(X)$，令

$$(1.1) \qquad \hat{\mu}(A) \triangleq \int H(\eta, A)\mu(d\eta), \quad A \in \mathscr{S},$$

$\mu_t \triangleq \mu S(t)$, $t \geqslant 0$，则

$$(1.2) \quad \hat{\mu}_t(A) = \sum_{B \in \mathscr{S}} E_A\left[\exp\left(-\int_0^t V(A_s)ds\right), A_t = B\right]\hat{\mu}(B).$$

特别，若 $V(A) = 0$, $A \in \mathscr{S}$ 且 $\mu \in \mathscr{I}$，则 $\hat{\mu}$ 是对偶过程 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 的一个调和函数，即设 $p(t, A, B)$ 为对偶过程的转移概率，

$$(1.3) \qquad \hat{\mu}(A) = \sum_{B \in \mathscr{S}} p(t, A, B)\hat{\mu}(B), \quad A \in \mathscr{S}$$

证. 由 (1.1)，(1.6.1) 得知：$\forall A \in \mathscr{S}$,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_t(A) &= \int H(\cdot, A) d\mu S(t) = \int S(t) H(\cdot, A) d\mu \\
&= \int E_A[H(\cdot, A_t) e^{-\int_0^t V(A_s) ds}] d\mu \\
&= \sum_{B \in \mathscr{S}} E_A \left[\int H(\cdot, B)) d\mu \cdot I_{\{B\}}(A_t) \right. \\
&\qquad \left. \cdot \exp\left(-\int_0^t V(A_s) ds\right) \right] \\
&= \sum_{B \in \mathscr{S}} E_A \left[\exp\left(-\int_0^t V(A_s) ds\right); A_t = B \right] \hat{\mu}(B)
\end{aligned}
$$

故 (1.2) 成立. 当 $V(A) = 0$, $A \in \mathscr{S}$, $\mu \in \mathscr{I}$ 时, $\mu_t = \mu$, 因而由 (1.2) 知

$$
\hat{\mu}(A) = \sum_{B \in \mathscr{S}} E_A[I_{\{B\}}(A_t)] \hat{\mu}(B) = \sum_{B \in \mathscr{S}} p(t, A, B) \hat{\mu}(B) \cdot \square
$$

2. 定理 设 $\delta \triangleq \inf_{u \in S} c(u)(1 - b(u)) > 0$, 则相应于 $c(u, \eta)$ 的自旋变相过程遍历. 它的唯一的不变测度 ν 由

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad \hat{\nu}(A) = E_A &\left[\exp\left(-\int_0^\tau V(A_s) ds\right); \tau < \infty, A_\tau = \phi \right] \\
- E_A &\left[\exp\left(-\int_0^\tau V(A_s) ds\right); \tau < \infty, A_\tau = \{\infty\} \right]
\end{aligned}
$$

决定,其中 $\hat{\nu}(A)$ 由 (1.1) (其中的 μ 换成 ν) 定义.

进一步,若 $\mu \in \mathscr{P}(X)$, $\mu_t \triangleq \mu S(t)$, 则

$$
(2.2) \qquad |\hat{\mu}_t(A) - \hat{\nu}(A)| \leqslant 2e^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0, \quad A \in \mathscr{S}.
$$

证. 1° 由于 $\{H(\cdot, A), A \in \mathscr{S}\}$ 所生成的向量空间是 $C_y l(X)$, 因而在 $C_b(X)$ 中稠,所以由 (1.1) 及 $\mu_t \triangleq \mu S(t)$ 知若能证明: $\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$, 当 $t \to \infty$ 时 $\hat{\mu}_t(A)$ 有同一极限, 则 $\exists \nu \in \mathscr{P}(X)$ 使 $\forall \mu \in \mathscr{P}(X)$ 有 $\mu_t \Longrightarrow \nu$, 从而 $S(t)$ 遍历.

2° 现在来计算 $\hat{\mu}_t(A)$. 由于 $(q(A, B): A, B \in \mathscr{S})$ 过程唯一且 $(q(A, B): A, B \in \mathscr{S})$ 保守,从而不断. 于是可设过程 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 右连续. 由 τ 的定义知 $A_\tau = \phi$ 或 $\{\infty\}$. 再由 $q(A, B)$

的定义易知 $\forall B\in\mathscr{S}$，$q(\phi, B)=q(\{\infty\}, B)=0$，即 ϕ，$\{\infty\}$ 为 $\{A_t: t\geqslant 0\}$ 的吸收态，于是

$$(2.3)\qquad A_t=\begin{cases}\phi, & 若\ A_\tau=\phi,\ t\geqslant\tau,\\ \{\infty\}, & 若\ A_\tau=\{\infty\}, t\geqslant\tau.\end{cases}$$

再由 (2.3) 及 $V(A)$, $H(\eta, A)$ 的定义易知

$$(2.4)\ \int_\tau^t V(A_s)ds=0,\ -\hat{\mu}(\{\infty\})=\hat{\mu}(\phi)=1,\ \forall\mu\in\mathscr{P}(X).$$

由以上註解及引理 1 即得：$\forall A\in\mathscr{S}$，$t\geqslant 0$，$\mu\in\mathscr{P}(X)$ 有

$$\begin{aligned}(2.5)\quad \hat{\mu}_t(A)&=\sum_{B\in\mathscr{S}}E_A[e^{-\int_0^t VA_s ds}; A_t=B, \tau\leqslant t]\hat{\mu}(B)\\ &\quad+\sum_{B\in\mathscr{S}}E_A[e^{-\int_0^t V(A_s)ds}; A_t=B, \tau>t]\hat{\mu}(B)\\ &=E_A[e^{-\int_0^\tau V(A_s)ds}; A_\tau=\phi, \tau\leqslant t]\\ &\quad-E_A[e^{-\int_0^t V(A_s)ds}; A_\tau=\{\infty\}, \tau\leqslant t]\\ &\quad+\sum_{B\bar{\in}\{\phi,\{\infty\}\}}E_A[e^{-\int_0^t V(A_s)ds}; A_t=B, \tau>t]\hat{\mu}(B)\end{aligned}$$

记 (2.1) 的右边为 $r(A)$，则由 (2.5) 及 $|\hat{\mu}(B)|\leqslant 1$ 得知

$$\begin{aligned}(2.6)\quad |\hat{\mu}_t(A)-r(A)|&\leqslant E_A[e^{-\int_0^\tau V(A_s)ds}; A_\tau=\phi, t<\tau<\infty]\\ &\quad+E_A[e^{-\int_0^\tau V(A_s)ds}; A_\tau=\{\infty\}, t<\tau<\infty]\\ &\quad+\sum_{B\bar{\in}\{\phi,\{\infty\}\}}E_A[e^{-\int_0^t V(A_s)ds}; A_t=B, t<\tau]\end{aligned}$$

由于当 $s<\tau$ 时，$A_s\bar{\in}\{\phi, \{\infty\}\}$，故 $A_s\cap S\neq\phi$，从而由假设

$$V(A_s)=\sum_{u\in A_s\cap S}c(u)(1-b(u))\geqslant\delta.$$

于是当 $t<\tau$ 时，

$$(2.7)\qquad \delta t\leqslant\int_0^t V(A_s)ds\leqslant\int_0^\tau V(A_s)ds.$$

由 (2.6), (2.7) 得知 $\forall A\in\mathscr{S}$, $t\geqslant 0$ 有

$$(2.8)\quad |\hat{\mu}_t(A)-r(A)|\leqslant e^{-\delta t}\Big[P_A[A_\tau=\phi]+P_A[A_\tau=\{\infty\}]+\sum_{B\in\{\phi,\{\infty\}\}}P_A(A_t=B)\Big]\leqslant 2e^{-\delta t}.$$

故 $\forall A\in\mathscr{S}$.

$$(2.9)\qquad \lim_{t\to\infty}\hat{\mu}_t(A)=r(A),\ \forall\mu\in\mathscr{P}(X),$$

从而 $\exists\nu\in\mathscr{P}(X)$, $\mu_t\triangleq\mu S(t)\underset{(t\to\infty)}{\Longrightarrow}\nu$ 对任何 $\mu\in\mathscr{P}(X)$成立，即 $S(t)$ 遍历.

再由 $\mu_t\underset{(t\to\infty)}{\Longrightarrow}\nu$, $H(\cdot,A)\in C_b(X)$ 及(1.1)知

$$\hat{\nu}(A)=\lim_{t\to\infty}\hat{\mu}_t(A)=r(A),\ \forall A\in\mathscr{S}.$$

故(2.1)成立，从而由(2.8)知 (2.2) 成立. □

由于定理 2 的缘故，人们可以期望，对偶技巧的其它应用多数出自 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$, 的情形. 因此本节的其余部分都作此假设.

3. 引理 设 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$; $\gamma\in\mathscr{P}(X)$ 且当 $c(u,\eta)=c_1(u,\eta)$ 时，$\gamma=\nu_1$; 当 $c(u,\eta)=c_2(u,\eta)$ 时，

$$\gamma=\prod_{u\in S}\mu_u,$$

其中 $\mu_u\in\mathscr{P}(\{0,1\})$

$$\mu_u(\{0\})=\mu_u(\{1\})=\frac{1}{2},\ u\in S.$$

则 $\exists\nu\in\mathscr{P}(X)$ 使 $\gamma S(t)=\gamma_t\Rightarrow\nu(t\to\infty)$. 且

$$(3.1)\quad \hat{\nu}(A)=P_A(A_\tau=\phi,\tau<\infty)-P_A(A_\tau=\{\infty\},\tau<\infty)$$

证. 当 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$ 时，$V(A)\equiv 0$, $A\in\mathscr{S}$, 因而由引理 1 知有

$$(3.2)\quad \forall\mu\in\mathscr{P}(X),\ A\in\mathscr{S},\ t\geqslant 0,\ \hat{\mu}_t(A)=E_A[\hat{\mu}(A_t)].$$

当 $c(u,\eta)=c_1(u,\eta)$ 时，容易算出

$$(3.3)\qquad \hat{\gamma}(A)=\int H_1(\cdot,A)d\nu_1=\begin{cases}1, & A=\phi,\\ -1, & A=\{\infty\},\\ 0, & \text{其它 } A\in\bar{\mathscr{S}}.\end{cases}$$

而 $c(u,\eta)=c_2(u,\eta)$ 时，若 $A\not\ni\infty$，则

$$\hat{\gamma}(A)=\int H_2(\eta,A)\gamma(d\eta)=\prod_{u\in A}\int(2\eta(u)-1)\mu_u(d\eta(u))$$

$$=\begin{cases}1, & A=\phi,\\ \prod_{u\in A}[-\mu_u(\{0\})+\mu_u(\{1\})]=0, & A\neq\phi,\end{cases}$$

若 $A\ni\infty$，则

$$\hat{\gamma}(A)=-\int H_2(\eta,A\backslash\infty)\gamma(d\eta)=\begin{cases}-1, & A=\{\infty\},\\ 0, & A\backslash\{\infty\}\neq\phi\end{cases}$$

故仍有 (3.3). 于是由 (3.2) 得

$$(3.4)\quad \hat{\gamma}_t(A)=P_A(A_t=\phi)-P_A(A_t=\{\infty\}),\ A\in\bar{\mathscr{S}}$$

由于 $\phi,\{\infty\}$ 是 $\{A_t:t\geqslant 0\}$ 的吸收态，所以当 $t\to\infty$ 时

$$(3.5)\ P_A(A_t=\phi)=P_A(A_\tau=\phi,\tau\leqslant t)\to P_A(A_\tau=\phi,\tau<\infty),$$
$$P_A(A_t=\{\infty\})=P_A(A_\tau=\{\infty\},\tau\leqslant t)$$
$$\to P_A(A_\tau=\{\infty\},\tau<\infty).$$

故 $\forall A\in\bar{\mathscr{S}}$, $\lim_{t\to\infty}\hat{\gamma}_t(A)$ 存在，从而由定理 2 的证明 1° 知 $\exists\nu\in\mathscr{P}(X)$ 使 $\gamma_t=\gamma S(t)\Rightarrow\nu(t\to\infty)$. 且由 (3.4), (3.5) 知 (3.1) 成立. □

4. 定理 设 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$. 若

$$(4.1)\qquad \forall A\in\bar{\mathscr{S}},\ P_A(\tau<\infty)=1,$$

则相应的自旋变相过程遍历，且唯一的不变测度 ν 由 (3.1) 决定.

若 $\forall A\ni\infty$ 有 $p(u,A)=0$, $u\in S$, 则 (4.1) 是相应的自旋变相过程遍历的充分与必要条件.

证. 由定理 2 的证明 1° 知：要证定理的前一部分，只需证明 $\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$，$\lim\limits_{t\to\infty}\hat{\mu}_t(A)$ 有相同的极限. 事实上，在 $b(u)\equiv 1$，$u\in S$ 的假设下，由引理 1 及(2.5)的算法(令该处的 $V(A)\equiv 0$ 即可)得

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t(A) &= E_A[\hat{\mu}(A_t)] = E_A[\hat{\mu}(A_t);\ \tau\leqslant t] + E_A[\hat{\mu}(A_t);\tau>t]\\ &= P_A(A_\tau=\phi,\ \tau\leqslant t) - P_A(A_\tau=\{\infty\},\ \tau\leqslant t)\\ &\quad + E_A[\hat{\mu}(A_t);\ \tau>t]\\ &\xrightarrow[(t\to\infty)]{} P_A(A_\tau=\phi,\tau<\infty) - P_A(A_\tau=\{\infty\},\ \tau<\infty).\end{aligned}$$

其中最后一步用到 (4.1). 且由上式知此时唯一的不变测度 ν 由 (3.1) 决定.

至于定理的后一部分，首先注意：若$\forall A\ni\infty$，有 $p(u,A)=0$，$u\in S$，则 $\nu_0\in\mathscr{I}(c_1(\cdot,\ \cdot))$ ($\because c_1(u,\theta)\equiv 0$) 且 $\nu_1\in\mathscr{I}(c_2(\cdot,\ \cdot))$，($\because c_2(u,\mathbf{1})\equiv 0$). 若 (4.1) 不成立，则由 (3.1) 决定的不变测度 ν 在 $c(u,\eta)=c_1(u,\ \eta)$ 情形下 $\neq\nu_0$，而在 $c(u,\eta)=c_2(u,\ \eta)$ 的情形下$\neq\nu_1$. 因为当 $P_A(\tau<\infty)<1$ 时，由(3.1) 知

$$\left|\int H_1(\eta,\ A)\nu_0(d\eta)\right| = |H_1(\theta,A)| = 1 \neq |\hat{\nu}(A)|$$

$$\left|\int H_2(\eta,\ A)\nu_1(d\eta)\right| = |H_2(\mathbf{1},A)| = 1 \neq |\hat{\nu}(A)|$$

故相应的自旋变相过程不遍历. □

5. 推论 设 $b(u)\equiv 1$，$u\in S$. 若

$$\omega\triangleq\sup_u c(u)\sum_{F\in\bar{\mathscr{P}}} p(u,\ F)[|F\cap S|-1]<0$$

则相应的自旋变相过程遍历.

证. 由 (1.5.1)，(1.5.2) 知 $\forall A\in\bar{\mathscr{P}}$，有

$$\begin{aligned}P_A(\tau=\infty) &= \lim_{t\to\infty}P_A(t<\tau) = \lim_{t\to\infty}P_A(A_t\bar{\in}\{\phi,\ \{\infty\}\})\\ &= \lim_{t\to\infty}P_A(|A_t\cap S|\geqslant 1)\leqslant\lim_{t\to\infty}E_A|A_t\cap S|\end{aligned}$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} |A\cap S| e^{\omega t} = 0.$$

故 (4.1) 成立，因而相应的过程遍历.

6. 推论 设 $b(u)\equiv 1$, $u\in S$, 且 $\forall A\ni\infty, u\in S$, $p(u,A)=0$. 若 $c(u,\eta)=c_1(u,\eta)$, 则相应的自旋变相过程遍历的充分与必要条件是下列两式有一成立.

(6.1) $$\forall u\in S,\ P_{\{u\}}(\tau<\infty)=1,$$

(6.2) $$\forall u\in S,\ \lim_{t\to\infty} P_{\{u\}}(A_t=\phi)=1.$$

证. 1° 先证

(6.3) $$\forall A\in\mathscr{S},\ P_A(\tau<\infty)=\lim_{t\to\infty} P_A(A_t=\phi).$$

当 $A\not\ni\infty$, $B\ni\infty$ 时，由 (1.4.12) 及 (1.4.3) 知

$$q_1(A,B)=\sum_{u\in A} c(u)\sum_{F\cup(A\setminus u)=B} p(u,F)$$

$$=\sum_{u\in A} c(u)\sum_{\substack{F\cup(A\setminus u)=B\\ F\ni\infty}} p(u,F)=0$$

于是 $(q_1(A,B): A, B\in\mathscr{S})$ 过程的转移概率满足

(6.4) $$p(t,A,B)=0,\ A\not\ni\infty,\ B\ni\infty.$$

故当 $A\in\mathscr{S}$ 时，$A\not\ni\infty$ 有 $P_A(\tau\leqslant t)=P_A(A_t=\phi)$，从而 (6.3) 获证.

2° 由 (6.3) 知 (6.1), (6.2) 等价. 而条件 (6.1) 的必要性由定理 4 立刻得到，因此剩下的只需证 (6.1) 的充分性. 由定理 4 的后一部分证明知此时 $\nu_0\in\mathscr{I}(c_1(\cdot,\cdot))$，所以由定理 3.3.4 及 $c_1(u,\eta)$ 的吸引性 (引理 1.3) 知只需证:

(6.5) $$\lim_{t\to\infty}\nu_1 S_1(t)=\bar{\nu}_1=\nu_0.$$

即证 $\bar{\nu}_1(X\setminus\{\theta\})=0$，亦即证: $\bar{\nu}_1(\{\eta(u)=1\}=0$, $\forall u\in S$，亦即证:

(6.6) $$\forall u\in S,\ \lim_{t\to\infty} P_1(\eta_t(u)=1)=0.$$

但由定理 1.6 有

$$P_1(\eta_t(u)=1)=1-P_1(\eta_t(u)=0)=1-E_1H_1(\eta_t,\{u\})$$
$$=1-E_{\{u\}}H_1(1,\ A_t)=1-P_{\{u\}}(A_t=\phi).$$

故 (6.6) 与 (6.2)，因而 (6.1) 等价，(6.1) 的充分性获证

7. 例 (a) 接触过程. 由例 1.2(b) 知此时 $b(u)=1,\ u\in S$，于是由推论 5 及 (1.2.4) 知当

$$0>\omega=\sup_u(1+\lambda)\left(-\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\sum_{v\neq u}p(u,v)\right)$$
$$=-1+\lambda(1-\inf_u p(u,u))$$

时，过程遍历. 故

(7.1) $$\lambda_c\geqslant(1-\inf_u p(u,u))^{-1}.$$

对于基本接触过程，则有

(7.2) $$\lambda_c\geqslant\frac{1}{2d}.$$

应用本节的方法还可以对 λ_c 的下界有改进，我们留待 § 4 专门讨论接触过程时再介绍.

§ 3 选举模型的不变测度与吸引场

本节先给出选举模型关于 $H_1(\eta,\ A)$ 的对偶过程 (以下有时称对偶链) 的另一描述. 再应用对偶技巧讨论它的不变测度集的构造以及不变测度的吸引场.

1. 设选举模型的速度函数

(1.1) $$c(u,\eta)=\begin{cases}\sum_v p(u,\ v)\eta(v),\ \eta(u)=0,\\ \sum_v p(u,v)(1-\eta(v)),\ \eta(u)=1,\end{cases}\quad u\in S,\eta\in X,$$

其中 $P=(p(u,\ v):u,\ v\in S)$ 为随机矩阵，即 $p(u,\ v)\geqslant 0,\ u,$

$v\in S$, $\sum_v p(u,v)=1$, $u\in S$. $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是与之相应的马氏半群. $P(t)=(p_t(u,v):u,v\in S)$, $t\geqslant 0$, 为以 $P-I$(I 为单位矩阵)为 Q 矩阵的 Q 过程,即 $P(t)=e^{(P-I)t}$, 或等价地

$$(1.2)\qquad p_t(u,v)=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}p^{(n)}(u,v),\ u,v\in S,\ t\geqslant 0,$$

其中 $p^{(n)}(u,v)$ 为矩阵 P^n 在 (u,v) 处的元,即以 P 为转移矩阵的离散参数马链由 u 经 n 步转移到 v 的概率.

由 (1.2.2), (1.4.3) 及 (1.4.12) 知选举模型 (1.1) 关于 $H_1(\eta,A)$ 的对偶链的 Q 矩阵满足

$$q_1(A,B)=\begin{cases}0, & \text{若 (i) } A\ni\infty,\ B\not\ni\infty \text{ 或 (ii) } A\not\ni\infty,\ B\ni\infty,\\ q_1(A\backslash\{\infty\},\ B\backslash\{\infty\}), & \text{若 } A\cap B\ni\infty,\end{cases}$$

A, $B\in\mathscr{S}$, 因此以 $\mathscr{S}$ 为态空间以 $(q_1(A,B);\ A,B\in\mathscr{S})$ 为 Q 矩阵的马链完全决定 (1.1) 关于 $H_1(\eta,A)$ 的对偶链,故今后称 $(q_1(A,B):\ A,B\in\mathscr{S})$ 过程为选举模型关于 $H_1(\eta,A)$ 的对偶链. 又由于 $(q(A,B):A,B\in\mathscr{S})$ 由

$$(1.3)\qquad \begin{cases} q(A,B)\triangleq\begin{cases}\sum\limits_{v\in A\backslash u}p(u,v), & B=A\backslash u,\ u\in A,\\ p(u,v), & B=(A\backslash u)\cup v,\ u\in A,\ v\notin A\\ 0, & \text{其它 } B\neq A,\end{cases}\\ q(A)=-q(A,A)\triangleq\sum\limits_{B\neq A}q(A,B)\\ \qquad =\sum\limits_{u\in A}(1-p(u,u)).\end{cases}$$

给出,所以它应该有以下的刻划:

"$\{A_t:t\geqslant 0\}$ 为以 $\mathscr{S}$ 为态空间的随机过程. A_t 中的点若不相遇,则 A_t 中的点独立地按转移概率 $P(t)$ 运动;若某些点相遇,则每次只有两点相遇,且相遇后结合成一点不再分开,仍然以 $P(t)$ 与其它点独立地运动".

下面确切地叙述这个结论并证明之.

设 $u\in S, X_u \triangleq \{X_u(t): t\geqslant 0\}$为以 S 为态空间,以 $P(t), t\geqslant 0$ 为转移概率且 $X_u(0)=u$ 的右连续马链. 再设 $\{X_u: u\in S\}$ 独立. 今往证:

$$(1.4)\quad P\left(\bigcup_{\substack{u,v\in S\\ u\neq v}}\bigcup_{t>0}\{X_u(t-)\neq X_u(t),\ X_v(t-)\neq X_v(t)\}\right)=0,$$

即以概率 1 $\{X_u: u\in S\}$ 的任何两个过程没有共同的不连续点.

由于 S 可数,为证 (1.4) 只需证: $\forall u, v\in S, u\neq v$, $\forall N\in Z_+$, 有

$$(1.5)\quad P_N \triangleq P\left(\bigcup_{0<t\leqslant N}\{X_u(t-)\neq X_u(t), X_v(t-)\neq X_v(t)\}\right)=0$$

为此 $\forall n\geqslant 1$, $\forall k\in Z_+$, 令

$$I_{n,k}\triangleq P\left(\bigcup_{\frac{k}{2^n}<t\leqslant\frac{k+1}{2^n}}\{X_u(t-)\neq X_u(t),\ X_v(t-)\neq X_v(t)\}\right),$$

则由 X_u, X_v 右连续、独立及 [1,§6.1 定理 1.3] 得知

$$I_{n,k}\leqslant P\left(\left\{\exists s,\ s'\in\left(0,\ \frac{1}{2^n}\right] 使\right.\right.$$

$$\left.\left.X_u\left(\frac{k}{2^n}+s\right)\neq X_u\left(\frac{k}{2^n}\right),\ X_v\left(\frac{k}{2^n}+s'\right)\neq X_v\left(\frac{k}{2^n}\right)\right\}\right)$$

$$=P\left(\exists s\in\left(0,\ \frac{1}{2^n}\right] 使\ X_u\left(\frac{k}{2^n}+s\right)\neq X_u\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$$

$$\times P\left(\exists s'\in\left(0,\ \frac{1}{2^n}\right) 使\ X_v\left(\frac{k}{2^n}+s'\right)\neq X_v\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$$

$$=E\left[1-\exp\left\{\left(p\left(X_u\left(\frac{k}{2^n}\right),\ X_u\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)-1\right)\frac{1}{2^n}\right\}\right]$$

$$\times\ E\left[1-\exp\left\{\left(p\left(X_v\left(\frac{k}{2^n}\right),\ X_v\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)-1\right)\frac{1}{2^n}\right\}\right]$$

$$\leqslant \left[1-\exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right]^2 \leqslant \frac{1}{2^{2n}}.$$

于是

$$P_N \leqslant \sum_{k=0}^{N2^n-1} I_{nk} \leqslant \frac{N2^n}{2^{2n}} = \frac{N}{2^n} \to 0 \ (n\to\infty),$$

故 (1.5) 获证. 因而 (1.4) 获证.

由 (1.4)，将基本概率空间清洗后，不妨设

$$(1.6)\quad \sum_{\substack{u,v\in S\\ u\neq v}} \bigcup_{t>0} \{\omega: X_u(t-,\omega)\neq X_u(t,\omega),\ X_v(t-,\omega) \neq X_v(t,\omega)\} = \phi.$$

故以下**恒设 (1.6) 成立**. 下面我们来定义 A_t:

对给定的 $A\in\mathscr{S}$，令

$$(1.7)\qquad \tau_0 \triangleq 0,\ A_0\triangleq A,\quad n\triangleq|A|>1$$

$$\tau_1\triangleq \sup\{t>0,\ X_u(t),\ u\in A,\ \text{两两不同}\}.$$

此处以及今后约定 $\sup[0,\infty)=\infty$. 于是 $X_u(\tau_1(\omega),\omega)$, $u\in A$, 中的不同元素数必 $\leqslant n-1$, 否则由 $X_u(t)$ 的右连续性知 $\forall\omega\in\Omega$, $\exists\varepsilon=\varepsilon(\omega)>0$ 使 $\forall\delta<\varepsilon$, $\delta>0$ 有 $X_u(\tau_1(\omega)+\delta,\omega)=X_u(\tau_1(\omega),\omega)$, $u\in A$, 两两不同，这与 $\tau_1(\omega)$ 的定义矛盾. 于是在 τ_1 处至少有两个过程相遇，而由 (1.6) 知在 τ_1 处**恰有一个**过程跳跃到另一过程的位置上. 即存在唯一的 $\tilde{u}_1=\tilde{u}_1(\omega)$ 使

$$(1.8)\qquad \begin{cases} X_u(\tau_1),\ u\in A\backslash\tilde{u}_1\ \text{两两不同，且} \\ X_{\tilde{u}_1}(\tau_1-)\neq X_{\tilde{u}_1}(\tau_1)\in\{X_u(\tau_1): u\in A\backslash\tilde{u}_1\}. \end{cases}$$

令

$$(1.9)\ A_t\triangleq\{X_u(t): u\in A\},\ 0\leqslant t<\tau_1;\ A_{\tau_1}\triangleq\{X_u(\tau_1): u\in A\backslash\tilde{u}_1\}.$$

设 $\tau_1,\cdots,\tau_k$; $\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k$; A_t, $0\leqslant t\leqslant\tau_k$ 已定义，则令

$$(1.10)\ \tau_{k+1}\triangleq\sup\{t>\tau_k: X_u(t),\ u\in A\backslash\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}\ \text{两两不同}\}.$$

于是和前面的讨论一样，存在唯一的 $\tilde{u}_{k+1}$ 使

$$(1.11)\begin{cases}X_u(\tau_{k+1}),\ u\in A\backslash\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_{k+1}\},\ \text{两两不同,且}\\ X_{\tilde u_{k+1}}(\tau_{k+1}-)\neq X_{\tilde u_{k+1}}(\tau_{k+1})\in\{X_u(\tau_{k+1}):u\in A\backslash\\ \qquad\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_{k+1}\}\}\end{cases}$$

令

$$(1.12)\begin{cases}A_t\triangleq\{X_u(t):u\in A\backslash\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_k\}\},\ \tau_k\leqslant t<\tau_{k+1},\\ A_{\tau_{k+1}}\triangleq\{X_u(\tau_{k+1}):u\in A\backslash\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_{k+1}\}\}.\end{cases}$$

综合上述定义及讨论易知：令 $\mathscr{F}_t^A\triangleq\{X_u(s):u\in A,\ s\leqslant t\}$，则 (i) 所有定义的 τ_k，$\tilde u_k$ 都与 ω 及 A 有关，且 $\forall t\geqslant 0$，$\{\tau_k\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t^A$，$\forall C\subset A$，$|C|=k$，$\{\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1};\ \{\tilde u_1,\ \cdots,\ \tilde u_k\}=C\}\in\mathscr{F}_t^A$；(ii) τ_k 的个数 $\leqslant|A|-1$ 且 $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_{|A|-1}$，若 $\tau_k(\omega)=\infty$，则 $\tau_k(\omega)=\cdots=\tau_{|A|-1}(\omega)=\infty$；(iii) $|A_t|=n-k$，当 $\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1}$ 时，且

$$(1.13)\begin{cases}\{\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1}\}=\{A_t=\{X_u(t):u\in A\backslash\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_k\}\},\\ \{\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1},\{\tilde u_1,\cdots,\tilde u_k\}=C\}=\{A_t=\{X_u(t):\\ \qquad u\in A\backslash C\}\};\end{cases}$$

(iv) $\forall t\geqslant 0,\ A_t\subset\{X_u(t):u\in A\}$.

下面的引理便是前面所说刻划的确切叙述.

2. 引理 设 $\forall u\in S$，$X_u=\{X_u(t):t\geqslant 0\}$ 是以 $e^{(P-I)t}$ 为转移概率,以 S 为态空间且 $X_u(0)=u$ 的右连续马链,且 X_u，$u\in S$，独立. $\forall A\in\mathscr{S}$，按 (1.7)—(1.12) 定义 $\{A_t:t\geqslant 0\}$. 则 (i) $\{A_t:t\geqslant 0\}$ 是选举模型 (1.1) 关于 $H_1(\eta,\ A)$ 的对偶链,即为以 $\mathscr{S}$ 为态空间,以 (1.3) 为 Q 矩阵的 Q 过程.

(ii) $\forall A\in\mathscr{S}$，$A_t\subset\{X_u(t):u\in A\}$，因而 $\forall\mu\in\mathscr{P}(X)$ 有

$$(2.1)\qquad E_A\hat\mu(A_t)\geqslant E_A\hat\mu(\{X_u(t):u\in A\}),\ t\geqslant 0.$$

P_A，E_A 表示 $A_0=A$ 时，$\{A_t:t\geqslant 0\}$ 的概率分布及相应的数学期望.

证. 1° 给定 $A=\{u_1,\cdots,u_n\}\in\mathscr{S}$，记 $\tilde{\mathscr{F}}_t^A\triangleq\sigma(A_s:s\leqslant$

t)，$\mathscr{F}_t^A$ 如前，并设 $B\in\mathscr{S}$，今世证：$\forall s<t$

(2.2) $$P_A(A_t=B\,|\,\widetilde{\mathscr{F}}_t^A)=P_A(A_t=B\,|\,A_s),$$

即要证：$\forall F\in\widetilde{\mathscr{F}}_s^A$，有

(2.3) $$\int_F P_A(A_t=B\,|\,\widetilde{\mathscr{F}}_s^A)dP_A=\int_F P_A(A_t=B\,|\,A_s)dP_A.$$

而由 (1.12), (1.13)

(2.3) 的左边＝

(2.4) $$=\sum_{k=0}^{|A|-1}\sum_{\substack{C\subset A\\|C|=k}}\int_F I_{\{\tau_k\leqslant s<\tau_{k+1},\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}=C\}}I_{\{A_t=B,A_s=\{X_u(s):u\in A\setminus C\}\}}dP_A$$

由于 $\widetilde{\mathscr{F}}_s^A\subset\mathscr{F}_s^A$，$\{\tau_k\leqslant s<\tau_{k+1},\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}=C\}\in\mathscr{F}_s^A$，$(X_{u_1},\cdots X_{u_n})$ 是马程及 $I_{\{A_t=B,A_s=\{X_u(s):u\in A\setminus C\}\}}$ 是 $\{X_u(r):u\in A\setminus C,\ r\in[s,t]\}$ 的函数且 $\mathscr{F}_{[s,t]}^A\triangleq\sigma(X_u(r):u\in A,\ s\leqslant r\leqslant t)$ 可测，故

(2.4) 的右边的每一项＝

(2.5) $$\begin{aligned}&=\int_F I_{\{\tau_k\leqslant s<\tau_{k+1},\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}=C\}}P_A(A_t=B,A_s=\{X_u(s):\\&\qquad u\in A\setminus C\}\,|\,\mathscr{F}_s^A)dP_A\\&=\int_F I_{\{\tau_k\leqslant s<\tau_{k+1},\{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}=C\}}P_A(A_t=B,A_s=\{X_u(s):\\&\qquad u\in A\setminus C\}\,|\,X_u(s),u\in A)dP_A\end{aligned}$$

以下往证：

(2.6) $$\begin{aligned}P_A(A_t=B,\ A_s=\{X_u(s):u\in A\setminus C\}\,|\,X_u(s),\ u\in A)\\=P_A(A_t=B,A_s=\{X_u(s):u\in A\setminus C\}\\|\{X_u(s):u\in A\setminus C\})\end{aligned}$$

由 $\{X_u(s):u\in C\}$ 与 $\{X_u(s):u\in A\setminus C\}$ 独立，$I_{\{A_t=B,A_s=\{X_u(s):u\in A\setminus C\}\}}$ 是 $\{X_u(r):s\leqslant r\leqslant t,\ u\in A\setminus C\}$ 的函数及条件期望的定义可得

(2.6) 的左边 $=P_A(A_t=B,A_s=\{X_u(s),u\in A\setminus C\}\,|\,X_u(s),$

$u\in A\setminus C)$. 记 $A\setminus C=\{u_{i_1},\cdots,u_{i_{n-j}}\}$，$\sum\limits_{\sigma}$ 表展布于 $(1,2,\cdots,$

$n-j$) 的一切排列 σ 上的和式，则(2.6) 的左边

$$= \sum_{W_1,\cdots,W_{n-j}\in S} P_A(A_t = B,\ A_s = \{X_u(s): u\in A\backslash C\} \mid X^{u_{l_i}}(s) = W_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-j) I_{\{X_{u_{l_i}}(s)=W_i, 1\leqslant i\leqslant n-j\}}$$

$$= \sum_{\{W_1,\cdots,W_{n-j}\}\subset S} \sum_{\sigma} P_A(A_t = B,\ A_s = \{X_u(s): u\in A\backslash C\} \mid X^{u_{l_i}}(s) = W_{\sigma(i)},\ 1\leqslant i\leqslant n-j)\cdot I_{\{X_{u_{l_i}}(s)=W_{\sigma(i)}, 1\leqslant i\leqslant n-j\}}$$

与 $X^{u_{l_1}}(s),\cdots,X^{u_{l_{n-j}}}(s)$ 的顺序无关且 $(X_{ul_1}(s),\cdots,X^{u_{l_{n-j}}}(s))$ 可测,因而 $\{X^{u_{l_1}}(s),\cdots,X^{u_{l_{n-j}}}(s)\}=\{X_u(s):u\in A\backslash C\}$ 可测. 故由 $\sigma(\{X_u(s):u\in A\backslash C\})\subset\sigma(X_u(s):u\in A\backslash C)$ 及条件期望的平滑性知 (2.6) 成立. 由 (2.4)—(2.6) 得

$$\int_F P_A(A_t = B \mid \tilde{\mathscr{F}}^A_s)dP_A = \int_F f(\omega)P_A(d\omega), \tag{2.7}$$

此处

$$f = \sum_{k=0}^{|A|-1} \sum_{\substack{C\subset A\\|C|=k}} P_A(A_t = B,\ A_s = \{X_u(s): u\in A\backslash C\} \mid \{X_u(s): u\in A\backslash C\}) \cdot I_{\{\tau_k\leqslant s<\tau_{k+1}, \{\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k\}=C\}}.$$

而由 (1.13) 知 f 是 $\sigma(A_s)$ 可测的, 即 $\exists g:\mathscr{S}\to R$ 使 $f(\omega)=g(A_s(\omega))$, $\omega\in\Omega$. 于是由 (2.7) 及 $F\in\tilde{\mathscr{F}}^A_s$ 的任意性知 $P_A(A_t= B\mid\tilde{\mathscr{F}}^A_s)=g(A_s)$, 两边对 $\sigma(A_s)$ 取条件期望,即得

$$P_A(A_t = B\mid A_s) = E_A[E_A[I_{\{A_t=B\}}\mid\tilde{\mathscr{F}}^A_s]\mid A_s]$$
$$= E_A[g(A_s)\mid A_s] = g(A_s) = P_A(A_t = B\mid\tilde{\mathscr{F}}^A_s).$$

故 (2.2) 获证.

由于 (2.2) $\forall A\in\mathscr{S}$ 成立,所以$\{A_t\geqslant 0,\ t\geqslant 0\}$具有马氏性, 由 $X_u,\ u\in S$, 的时齐性及独立知 $\{A_t:t\geqslant 0\}$ 具有时齐性.

2° 今往证: $\{A_t:t\geqslant 0\}$ 是以 (1.3) 为 Q 矩阵的 Q 过程.

给定 $A\in\mathscr{S}$, 设 A_t, $t\geqslant 0$ 为按第 1 目定义的过程, 于是 $p(t,A,B)\triangleq P_A(A_t=B)$, A, $B\in\mathscr{S}$, $t\geqslant 0$, 为 $\{A_t:t\geqslant 0\}$

的转移函数。我们来证明它的标准性：$\lim_{t\to 0} p(t, A, A) = 1$。

由 X_u，$u\in A$ 的独立性及［1，§ 6.2 定理 1］知

$$p(t,A,A) = P_A(A_t = A) \geqslant P_A(X_u(s) = u,\ u\in A,\ s\leqslant t)$$

$$= \prod_{u\in A} P_u(X_u(s) = u,\ s\leqslant t)$$

$$= \prod_{u\in A} \exp\{(p(u,u)-1)t\} \to 1(t\to 0)$$

因而标准性获证．由跳过程的知识知，它的 Q 矩阵 $(p'(0, A, B)$: $A, B\in\mathscr{S})$ 存在，于是要证明它就是 (1.3)． 首先由第 1 目知 $|A_t|\downarrow$，从而当 $|B| > |A|$ 时有 $p(t, A, B) = 0$, $\forall t\geqslant 0$，于是有

(2.8) 当 $|B| > |A|$, $p'(0, A, B) = 0$.

对于 $|B|\leqslant |A|$ 的情形．首先由 X_u, $u\in A$，的独立性经直接计算可得

$$(2.9)\quad \frac{d}{dt} P_{(u_1,\cdots,u_n)}((X_{u_1}(t),\cdots, X_{u_n}(t)) = (v_1,\cdots, v_n))|_{t=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q(u_k, v_k) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \delta(u_l, v_l),$$

其中 $q(u_k, v_k) = p(u_k, v_k) - \delta(u_k, v_k)$.

给定 $A = \{u_1,\cdots, u_n\}\in\mathscr{S}$ 令

$\tau \triangleq \sup\{t > 0: A_t = A\}$, $\tilde{\tau} \triangleq \sup\{t > 0: X_u(t) = u,\ u\in A\}$

显然 $\tilde{\tau}\leqslant\tau$，再由 (1.6) 可推出 $\tilde{\tau}\not<\tau$，故

$$(2.10)\qquad \tau = \tilde{\tau}.$$

以下分三种情形讨论：

情形 (a): $B = A$. 由 X_u,$u\in A$ 的独立性、(2.10) 及［1，§ 6.2 定理 1］知

$$e^{p'(0,A,A)t} = P_A(A_s = A, s < t) = P_A(\tau\geqslant t) = P_A(\tilde{\tau}\geqslant t)$$

$$= P_A(X_u(s) = u, \forall s \in [0, t), u \in A)$$

$$= \prod_{u \in A} \exp\{(p(u, u) - 1)t\},$$

故得

$$(2.11) \qquad p'(0, A, A) = \sum_{u \in A} (p(u, u) - 1).$$

当 $B \neq A$ 时，由 [1, § 6.2 定理 1] 知

$$(2.12) \qquad P_A(\tau \leqslant t, A_\tau = B) = (1 - \exp\{tp'(0, A, A)\}) \cdot \frac{p'(0, A, B)}{-p'(0, A, A)}.$$

情形 (b)：$B \neq A$, $|B| = |A|$. 设 $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$，记 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, $\sigma(\boldsymbol{v}) \triangleq (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$, $p(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \triangleq P_{\boldsymbol{u}}((X_{u_1}(t), \cdots, X_{u_n}(t)) = \boldsymbol{v})$, $\sum_\sigma$ 表展布在 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一切排列 σ 上的和式. 由 (2.10)、[1, § 6.2 定理 1]、(2.9) 及 (2.11)

$$P_A(\tau \leqslant t, A_\tau = B) = P_A(\tilde{\tau} \leqslant t, A_{\tilde{\tau}} = B)$$

$$= \sum_\sigma P_A((X_{u_1}(s), \cdots, X_{u_n}(s)) = \boldsymbol{u}, s < \tilde{\tau}, (X_{u_1}(\tilde{\tau}), \cdots, X_{u_n}(\tilde{\tau})) = \sigma(\boldsymbol{v}))$$

$$= \sum_\sigma (1 - \exp\{tp'(0, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\}) \frac{p'(0, \boldsymbol{u}, \sigma(\boldsymbol{v}))}{-p'(0, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$

$$= \sum_\sigma (1 - \exp\{tp'(0, A, A)\}) \frac{p'(0, \boldsymbol{u}, \sigma(\boldsymbol{v}))}{-p'(0, A, A)}$$

与 (2.12) 比较，并由 (2.9) 即得

$$(2.13) \qquad p'(0, A, B) = \sum_\sigma p'(0, \boldsymbol{u}, \sigma(\boldsymbol{v}))$$

$$= \begin{cases} p(u, v), & B = (A \backslash u) \cup v, u \in A, v \notin A, \\ 0, & \text{其它 } B \neq A, |B| = |A|. \end{cases}$$

情形 (c): $|B|<|A|$. 此时 $\{\tau\leqslant t,\ A_\tau=B\}=\{\tau=\tau_1,\ \tau_1\leqslant t,\ A_{\tau_1}=B\}$, 但由第 1 目知 $|A_{\tau_1}|=|A|-1$, 故有

(2.14) 当 $|B|<|A|-1$ 时, $P_A(\tau\leqslant t,\ A=B)=0$,

因而由 (2.12) 知

(2.15) 当 $|B|<|A|-1$ 时, $p'(0,\ A,\ B)=0$.

当 $|B|=|A|-1$ 时, 则由第 1 目的 τ_1 的定义及 (1.8), (1.6) 知

(2.16) $\{\tau\leqslant t,\ A_\tau=B\}=\{\tau_1=\tau\leqslant t,\ A_{\tau_1}=B\}$

$$=\bigcup_{u\in A}\left\{\begin{array}{l}\tau_1\leqslant t;\ X_\omega(s)=\omega,\ \forall\omega\in A,\ s\in[0,\ \tau_1);\\ X_v(\tau_1)=v,\ \forall v\in A\backslash u;\ X_u(\tau_1)\in A\backslash u=B\end{array}\right\}$$

于是当 $B\not\subset A$ 时,上式为空集,因而 $P_A(\tau\leqslant t,\ A_\tau=B)=0$. 故由 (2.12) 知

(2.17) 当 $B\not\subset A$ 时, $p'(0,\ A,\ B)=0$.

当 $B=A\backslash u_k$ 时, 记 $\boldsymbol{u}^{(j)}=(\cdots,\ u_{k-1},\ u_j,\ u_{k+1},\ \cdots)$, 则由 (2.16) [1,§ 6.2 定理 1], (2.9), (2.11)

$$\begin{aligned}
&P_A(\tau\leqslant t,\ A_\tau=B)\\
&=\sum_{j\neq k}P_A(\tau_1\leqslant t,(X_{u_1}(s),\cdots,X_{u_n}(s))=\boldsymbol{u},\forall s\in[0,\\
&\qquad\tau_1);\ (X_{u_1}(\tau_1),\cdots,X_{u_n}(\tau_1))=\boldsymbol{u}^{(j)})\\
&=\sum_{j\neq k}(1-\exp\{tp'(0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\})\frac{p'(0,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}^{(j)})}{-p'(0,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})}\\
&=\sum_{j\neq k}\frac{1-\exp\{tp'(0,\ A,\ A)\}}{-p'(0,\ A,\ A)}p(u_k,u_j)
\end{aligned}$$

与 (2.12) 比较即得

(2.18) 当 $B=A\backslash u$ 时, $p'(0,\ A,\ B)=\sum_{v\in A\backslash u}p(u,\ v)$.

综合 (2.8), (2.11), (2.13), (2.15), (2.17), (2.18) 即得

(2.19) $(p'(0,\ A,\ B):A,\ B\in\mathscr{S})$ 就是 (1.3).

至此 (i) 全部获证.

3° (ii) 的第一个结论在第 1 目已得到，再由 $\hat{\mu}$ 的定义即知 (2.1) 成立. □

3. 引理 设 $\{X(t):t\geqslant 0\}$，$\{Y(t):t\geqslant 0\}$ 为以 S 为态空间，以 $P(t)=e^{(P-I)t}$ 为转移概率的右连续马链，且相互独立，$\forall x$，$y\in S$，令

$$g(x,y)\triangleq P_{(x,y)}\Big(\bigcup_{t\geqslant 0}\{X(t)=Y(t)\}\Big) \tag{3.1}$$

$$=P_{(x,y)}(\exists t\geqslant 0\ 使\ X(t)=Y(t)),$$

其中 $P_{(x,y)}$ 为以 (x,y) 为初始状态的马链 $\{X(t),Y(t)):t\geqslant 0\}$ 的分布，则 $\forall x$，$y\in S$，

$$\lim_{t\to\infty} g(X(t),\ Y(t))=I_E,\quad \text{a. e. } (P_{(x,y)}) \tag{3.2}$$

其中 $E\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{s>n}\{X(s)=Y(s)\}=\{\exists t_n\in[0,\infty),t_n\nearrow\infty$ 使 $X(t_n)=Y(t_n)\}$.

证. 由 (3.1) 及 $(X(t),\ Y(t))$ 为时齐马链知 $\forall x$，$y\in S$，

$$g(X(t),Y(t))=P_{(X(t),Y(t))}\Big(\bigcup_{s\geqslant 0}\{X(s)=Y(s)\}\Big) \tag{3.3}$$

$$=E_{(x,y)}[I_{\bigcup_{s>t}\{X(s)=Y(s)\}}\mid (X(t),Y(t))]$$

$$=E_{(x,y)}[I_{\bigcup_{s>t}\{X(s)=Y(s)\}}\mid \mathscr{F}_t],$$

其中 $\mathscr{F}_t\triangleq\sigma\{(X(r),\ Y(r):0\leqslant r\leqslant t)$. 于是由 (3.3)

$$E_{(x,y)}g(X(t),\ Y(t))=E_{(x,y)}[E_{(x,y)}[I_{\bigcup_{s>t}\{X(s)=Y(s)\}}\mid (X(t),\ Y(t))]] \tag{3.4}$$

$$=P_{(x,y)}\Big(\bigcup_{s>t}\{X(s)=Y(s)\}\Big)\leqslant g(x,y),$$

故 $\forall t\geqslant s$，由时齐性及马氏性及 (3.4) 得

$$E_{(x,y)}[g(X(t),Y(t))\mid\mathscr{F}_s]=E_{(x,y)}[g(X(t),Y(t))\mid (X(s),Y(s))]$$

$$= E_{(X(s),Y(s))} g(X(t-s), Y(t-s)) \leqslant g(X(s), Y(s)),$$

即 $\{g(X(t), Y(t)) : t \geqslant 0\}$ 是一有界非负上鞅. 由鞅收敛定理 [3, 定理 3.10] 知

$$\lim_{t \to \infty} g(X(t), Y(t)) = L, \quad \text{a. e. } (P_{(x,y)}) \tag{3.5}$$

存在. 下面证明 (3.2).

事实上, $\forall n \in Z_+$, 由 $(X(t), Y(t))$ 的右连续性知

$$\bigcup_{s \geqslant n} \{X(s) = Y(s)\}$$

可测; 由 (3.3) 知

$$|g(X(n), Y(n)) - I_E| \leqslant E_{(x,y)}[\,|\,[I_{\bigcup\limits_{s \geqslant n}\{X(s)=Y(s)\}} - I_E|\,|\mathscr{F}_n] \tag{3.6}$$

$$+ |E_{(x,y)}[I_E|\mathscr{F}_n] - I_E| = I_{1n} + I_{2n} \text{ (设)}$$

由鞅收敛定理 [3, 系 2.18] 知

$$\lim_{n \to \infty} I_{2n} = 0, \quad \text{a. e. } (P_{(x,y)}) \tag{3.7}$$

令

$$\xi_m \triangleq \sup_{n \geqslant m} |I_{\bigcup\limits_{s \geqslant n}\{X(s)=Y(s)\}} - I_E|,$$

则 $0 \leqslant \xi_m \leqslant 2$, $\xi_m \to 0 (m \to \infty)$, 于是再由鞅收敛定理 [3, 系 2.18] 知

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} I_{1n} \leqslant \lim_{n \to \infty} E_{(x,y)}[\xi_m|\mathscr{F}_n] = E_{(x,y)}[\xi_m|(X(r), Y(r)),$$

$$0 \leqslant r < \infty] = \xi_m \to 0 \quad (m \to \infty), \text{ a. e. } (P_{(x,y)})$$

由此式及 (3.6), (3.7) 即得

$$\lim g(X(n), Y(n)) = I_E$$

再由 (3.5) 即得 (3.2). □

4. 定义 对于转移矩阵 $P = (p(u, v) : u, v \in S)$, S 上的有界实函数α,如果满足

$$\sum_v p(u, v)\alpha(v) = \alpha(u), \forall u \in S, \tag{4.1}$$

则称 α 为 P 的一个有界调和函数。记

(4.2) $\mathscr{H} \triangleq \{\alpha: S \to [0, 1]$ 且为 P 的调和函数$\}$.

选举模型的不变测度与 $\mathscr{H}$ 密切相关. 特别, 它的不变测度集的极点与 $\mathscr{H}$ 的下列子集 $\mathscr{H}^*$ 密切相关.

容易证明: $\forall \alpha \in \mathscr{H}$, $\forall n \in Z_+$

$$\sum_v p^{(n)}(u, v)\alpha(v) = \alpha(u), \quad u \in S. \tag{4.3}$$

若 $X(t)$ 是以 $P(t)$ 为转移概率的马链, 则 $\alpha(X(t))$, $t \geqslant 0$ 是关于 σ 域族 $\sigma(X(r): 0 \leqslant r \leqslant t)$, $t \geqslant 0$ 的有界鞅. 事实上, $\forall t \geqslant s$,

$$\begin{aligned} E_x[\alpha(X(t)) \mid X(r),\ 0 \leqslant r \leqslant s] &= E_x[\alpha(X(t)) \mid X(s)] \\ &= E_{X(s)}[\alpha(X(t - s))] = \sum_v p_{t-s}(X(s), v)\alpha(v) \\ &= e^{-(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} \sum_v p^{(n)}(X(s), v)\alpha(v) \\ &= e^{-(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} \alpha(X(s)) = \alpha(X(s)) \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(X(t))$ a. e. 存在. 定义

(4.4) $\mathscr{H}^* \triangleq \{\alpha \in \mathscr{H}: \lim\limits_{t \to \infty} \alpha(X(t)) = 0$ 或 1 在 E 上 a. e. 成立$\}$

其中 E 为引理 3 中所定义的集合。

本节将要证明的主要结果是下列的定理 5,6. 以下我们将采用第 1, 2 目的记号.

5. 定理 设 P 不可约, 对 $\alpha \in \mathscr{H}$, 设 $\nu_\alpha \in \mathscr{P}(X)$ 是具有边缘分布

$$\begin{aligned} &\nu_\alpha\{\eta: \eta(u) = 0\} = \alpha(u), \\ &\nu_\alpha\{\eta: \eta(u) = 1\} = 1 - \alpha(u), \end{aligned} \quad u \in S \tag{5.1}$$

的乘积概率. 则

(i) $\forall \alpha \in \mathscr{H}$，$\exists \mu_\alpha \in \mathscr{P}(X)$使$\nu_\alpha S(t) \Rightarrow \mu_\alpha (t \to \infty)$且$\mu_\alpha \in \mathscr{I}$.

(ii) $\mu_\alpha\{\eta: \eta(u) = 0\} = \alpha(u)$，$u \in S$.

(iii) $\mathscr{I}_e = \{\mu_\alpha: \alpha \in \mathscr{H}^*\}$

这个定理将选举模型的$\mathscr{I}$的构造问题归结为$\mathscr{H}^*$的构造.

6. 定理 设P不可约.

(i) 设 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 且 $\alpha \in \mathscr{H}^*$，则 $\mu S(t) \Rightarrow \mu_\alpha$ 当且仅当

$$(6.1) \qquad \lim_{t \to \infty} \sum_{v} p_t(u, v) \hat{\mu}(\{v\}) = \alpha(u), \ \forall u \in S,$$

$$(6.2) \qquad \lim_{t \to \infty} \sum_{u, v \in S} p_t(x, u) p_t(x, v) \hat{\mu}(\{u, v\}) = \alpha^2(x), \ \forall x \in S,$$

成立.

(ii) 设 $\forall u, v \in S$，$g(u, v) = 1$，$\mathscr{H}^* = \{0, 1\}$（即以 0 及 1 为值的两个常值函数）. 若 $\lambda \in [0, 1]$ 且 $\mu \in \mathscr{P}(X)$，则

$$(6.3) \qquad \mu S(t) \Rightarrow \lambda \nu_0 + (1 - \lambda) \nu_1$$

当且仅当

$$(6.4) \qquad \forall u \in S, \ \lim_{t \to \infty} \sum_{v} p_t(u, v) \hat{\mu}(\{v\}) = \lambda$$

成立.

这是选举模型的基本收敛定理，(i) 给出了μ属于μ_α的吸引场的充要条件，而 (ii) 给出了当 $\mathscr{I}_e = \{\nu_0, \nu_1\}$ 时，（此时 $\mathscr{I} = \{\lambda \nu_1 + (1 - \lambda)\nu_0: \lambda \in [0, 1]\}$)，任一不变测度的一个刻划.

下面我们通过一系列引理给出定理 5，6 的证明.

7. 引理 $\forall A \in \mathscr{S}$，定义

$$(7.1) \qquad g(A) \triangleq P_A(|A_t| < |A|，对某\ t \geq 0\ 成立)$$

（注意当 $x \neq y$，$g(\{x, y\}) = g(x, y)$）. 设P不可约且 $\alpha \in \mathscr{H}$ 则

(i) $\mu_\alpha = \lim_{t \to \infty} \nu_\alpha S(t)$ 存在（此处极限意义为测度弱收敛）；

(ii) $\mu_\alpha \in \mathscr{I}$;

(iii) $\forall A \in \mathscr{S}$, $0 \leqslant \hat{\mu}_\alpha(A) - \hat{\nu}_\alpha(A) \leqslant g(A)$;

(iv) $\forall u \in S$, $\mu_\alpha\{\eta:\eta(u) = 0\} = \alpha(u)$.

因而定理 5(i), (ii) 获证.

证. 由引理 2(ii) (令 (2.1) 中的 $\mu = \nu_\alpha$) 及

$\hat{\mu}(A) = \mu\{\eta:\eta(u) = 0, u \in A\}$ 有

$$E_A\hat{\nu}_\alpha(A_t) \geqslant E_A\hat{\nu}_\alpha(\{X_u(t):u \in A\}) \tag{7.2}$$

$$= E_A \prod_{u \in A} \nu_\alpha\{\eta:\eta(X_u(t)) = 0\} = \prod_{u \in A} E_{\{u\}}\alpha(X_u(t))$$

$$= \prod_{u \in A}\left[\sum_{v \in S} p_t(u, v)\alpha(v)\right] = \prod_{u \in A} \alpha(u) = \hat{\nu}_\alpha(A)$$

由此式及马氏性知当 $t > s \geqslant 0$ 时,有

$$E_A\hat{\nu}_\alpha(A_t) = E_A[E_A[\hat{\nu}_\alpha(A_t)|A_r:0 \leqslant r \leqslant s]] \tag{7.3}$$

$$= E_A[E_{A_s}[\hat{\nu}_\alpha(A_{t-s})]] \geqslant E_A\hat{\nu}_\alpha(A_s)$$

故 $\forall A \in \mathscr{S}$ 极限 $\lim\limits_{t\to\infty} E_A\hat{\nu}_\alpha(A_t)$ 存在且 $\geqslant \hat{\nu}_\alpha(A)$. 由引理 2.1 (参看 (2.3.2)) 及定理 2.2 的证 1° 知 $\exists \mu_\alpha \in \mathscr{P}(X)$使

$\nu_\alpha S(t) \Longrightarrow \mu_\alpha$, 且 $\forall A \in \mathscr{S}$,

$$\hat{\mu}_\alpha(A) = \lim_{t\to\infty} E_A\hat{\nu}_\alpha(A_t) \geqslant \hat{\nu}_\alpha(A). \tag{7.4}$$

故 (i) 获证.

其次 $\forall f \in C_b(X)$, $t \geqslant 0$.

$$\int f d\mu_\alpha S(t) = \lim_{s\to\infty}\int S(t)fd(\nu_\alpha S(s)) = \lim_{s\to\infty}\int S(t+s)fd\nu_\alpha$$

$$= \lim_{s\to\infty}\int S(s)fd\nu_\alpha = \int fd\mu_\alpha,$$

故 $\mu_\alpha \in \mathscr{I}$.

由 (7.4) 知 $\hat{\mu}_\alpha(A) - \hat{\nu}_\alpha(A) \geqslant 0$, 因而要证 (iii) 只需证 $\hat{\mu}_\alpha(A) - \hat{\nu}_\alpha(A) \leqslant g(A)$. 注意当$|A_t| = |A|$时有 $A_t = \{X_u(t): u \in A\}$, 于是由 (7.4) 及 (7.2) 的计算知

$$\hat{\mu}_\alpha(A) - \hat{\nu}_\alpha(A) = \lim_{t\to\infty} [E_A\hat{\nu}_\alpha(A_t) - E_A\hat{\nu}_\alpha(\{x_u(t): u\in A\})]$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} E_A[\hat{\nu}_\alpha(A_t) - \hat{\nu}_\alpha(\{X_u(t): u\in A\})]I_{\{|A_t|<A\}}$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty} P_A(|A_t| < |A|) = g(A).$$

此处 $\{X_u(t): u\in A\}$ 理解为随机变量 $X_u(t)$，$u\in A$，组成的集. 最后当$|A| = 1$时，由引理3知 $g(A)=0$，于是由 (iii) 知 $\forall u\in S$ 有

$$\mu_\alpha(\{\eta:\eta(u) = 0\}) = \hat{\mu}_\alpha(\{u\}) = \hat{\nu}_\alpha(\{u\})$$
$$= \nu_\alpha\{\eta:\eta(u) = 0\} = \alpha(u). \quad \square$$

8. 引理 设 $\alpha\in\mathscr{H}$ 及 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 满足 (6.1) 及 (6.2)，则

$$\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \mu_\alpha, \tag{8.1}$$

注意这就是定理 6(i) 的条件的充分性.

证. 由 $\hat{\mu}_t(A) = E_A\hat{\mu}(A_t)$及 μ_α 的定义知为证引理只需证:

$$\forall A\in\mathscr{S}, \lim_{t\to\infty}\left[E_A\hat{\mu}(A_t) - E_A\prod_{u\in A_t}\alpha(u)\right] = 0. \tag{8.2}$$

由 (6.1)，(6.2) 得知：$\forall u\in S$，

$$\sum_v p_t(u, v)(1-\eta(v)) \xrightarrow{\mu} \alpha(u), \tag{8.3}$$

事实上，由 (6.1) 知

$$E_\mu\left[\sum_v p_t(u, v)(1-\eta(v))\right] = \sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v\}) \xrightarrow{t\to\infty} \alpha(u).$$

由此式及 (6.2) 即得

$$E_\mu\left[\sum_v p_t(u, v)(1-\eta(v)) - \alpha(u)\right]^2$$

$$= \sum_{v_1,v_2} p_t(u, v_1)p_t(u, v_2)E_\mu(1-\eta(v_1))(1-\eta(v_2))$$

$$- 2\alpha(u)\sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v\}) + \alpha^2(u)$$

$$\to \alpha^2(u) - 2\alpha(u)\cdot\alpha(u) + \alpha^2(u) = 0.$$

故 (8.3) 成立.

由 (8.3) 知 $\forall A\in\mathscr{S}$,

$$\prod_{u\in A}\left(\sum_{v}p_t(u,v)(1-\eta(w))\right)\xrightarrow{\mu}\prod_{u\in A}\alpha(u),\ (t\to\infty).$$

因而(设 $A=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 下同)

$$\begin{aligned}(8.4)\quad &\lim_{t\to\infty}E_A\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\})\\ &=\lim_{t\to\infty}E_A\mu(\{\eta:\eta(X_u(t))=0,\ u\in A\})\\ &=\lim_{t\to\infty}E_\mu\left[E_A\left(\prod_{u\in A}(1-\eta(X_u(t)))\right)\right]\\ &=\lim_{t\to\infty}E_\mu\left[\prod_{u\in A}\left(\sum_{v}p_t(u,v)(1-\eta(v))\right)\right]\\ &=\prod_{u\in A}\alpha(u).\end{aligned}$$

令 $\tau\triangleq\inf\{t>0:|A_t|<n\}=\inf\{t>0:\exists u,\ v\in A,\ u\neq v,$ $X_u(t)=X_v(t)\}$, 则 τ 是关于 σ-域族 $\sigma(X_u(s):s\leqslant t,\ u\in A)$' $t\geqslant 0$ 的停时,令 $\mathscr{F}_\tau$ 是 τ 前 σ-域,则由 $\{X_A(t):t\geqslant 0\}$ 的强马尔可夫性及 (8.4) 知

$$\begin{aligned}(8.5)\quad &\lim_{t\to\infty}E_A[\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\}),\ \tau<\infty]\\ &=\lim_{t\to\infty}E_A[E_A[\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\}),\ \tau\leqslant t|\mathscr{F}_\tau]]\\ &=\lim_{t\to\infty}E_A[E_{\{X_u(\tau):u\in A\}}\hat{\mu}(\{X_u(t-\tau):u\in A\}),\ \tau\leqslant t]\\ &=E_A\left[\prod_{u\in A}\alpha(X_u(\tau)),\tau<\infty\right].\end{aligned}$$

于是由此式及 (8.4) 得

$$\begin{aligned}(8.6)\quad &\lim_{t\to\infty}E_A[\hat{\mu}(A_t),\ \tau=\infty]=\lim_{t\to\infty}E_A[\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\}),\\ &\tau=\infty]=\lim_{t\to\infty}E_A[\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\}]\\ &\qquad-\lim_{t\to\infty}E_A[\hat{\mu}(\{X_u(t):u\in A\}),\tau<\infty]\end{aligned}$$

$$= \prod_{u \in A} \alpha(u) - E_A \left[\prod_{u \in A} \alpha(X_u(\tau)), \tau < \infty \right].$$

再仿 (8.4), (8.5) 的方法可证:

$$\lim_{t \to \infty} E_A \left[\prod_{u \in A} \alpha(X_u(t)) \right] = \prod_{u \in A} \alpha(u),$$

$$\lim_{t \to \infty} E_A \left[\prod_{u \in A} \alpha(X_u(t)), \tau < \infty \right]$$

$$= E_A \left[\prod_{u \in A} \alpha(X_u(\tau)), \tau < \infty \right].$$

于是由 (8.6) 即得

$$(8.7) \lim_{t \to \infty} E_A [\hat{\mu}(A_t), \tau = \infty] = \lim_{t \to \infty} E_A \left[\prod_{u \in A} (X_u(t)), \tau = \infty \right]$$

$$= \lim_{t \to \infty} E_A \left[\prod_{u \in A_t} \alpha(u), \tau = \infty \right].$$

最后我们应用数学归纳法及 (8.7) 来证明 (8.2). 当 $|A| = 1$ 时, (8.7) 就是 (8.2). 设 (8.2) $\forall A \in \mathscr{S}, |A| < n$ 成立. 取 $A \in \mathscr{S}, |A| = n$, 则由 (8.7), 强马氏性及归纳假设知

$$\lim_{t \to \infty} E_A \left[\hat{\mu}(A_t) - \prod_{u \in A_t} \alpha(u) \right]$$

$$= \lim_{t \to \infty} E_A \left[\left(\hat{\mu}(A_t) - \prod_{u \in A_t} \alpha(u) \right), \tau = \infty \right]$$

$$+ \lim_{t \to \infty} E_A \left[\left(\hat{\mu}(A_t) - \prod_{u \in A_t} \alpha(u) \right), \tau < \infty \right]$$

$$= \lim_{t \to \infty} E_A \left[E_{A_\tau} \left[\hat{\mu}(A_t) - \prod_{u \in A_t} \alpha(u) \right], \tau < \infty \right] = 0.$$

最后一步用到在 $\{\tau < \infty\}$ 上 $|A_\tau| < n$. □

9. 定理 6 的证明 1° 先证 (ii). 首先注意: $\forall u \in S$, $c(u, \theta) = c(u, 1) = 0$, 故 $\nu_0, \nu_1 \in \mathscr{I}$. 由定理 2.2 的证 1° 知 $\mu_t \triangleq \mu S(t) \Rightarrow \lambda\nu_0 + (1-\lambda)\nu_1$ 等价于

(9.1) $\quad \forall A\in\mathscr{S}, \hat{\mu}_t(A)\to(\widehat{\lambda\nu_0+(1-\lambda)\nu_1})(A),\ (t\to\infty).$

而

$$(\widehat{\lambda\nu_0+(1-\lambda)\nu_1})(A)=\lambda\nu_0\left(\bigcap_{u\in A}\{\eta:\eta(u)=0\}\right)$$

$$+(1-\lambda)\nu_1\left(\bigcap_{u\in A}\{\eta:\eta(u)=0\}\right)$$

$$=\begin{cases}\lambda, & A\neq\phi,\\ 1, & A=\phi.\end{cases}$$

故 (9.1) 等价于(由 $\hat{\mu}_t(A)=E_A\hat{\mu}(A_t)$! 及 $\hat{\mu}_t(\phi)=\mu_t(X)=1$)

(9.2) $\quad \forall A\in\mathscr{S},\ A\neq\phi,\ \lim\limits_{t\to\infty}E_A\hat{\mu}(A_t)=\lambda.$

当 $A=\{u\}$ 时，(9.2) 立刻导出 (6.4). 因此要证 (ii)，只需证 (6.4) 导出 (9.2).

令 $\tau\triangleq\inf\{t>0:|A_t|=1\}$，于是要证 (6.4) 导出 (9.2)，只需证:

(9.3) $\quad P_A(\tau<\infty)=1,\ \forall A\in\mathscr{S}.$

事实上,若 (9.3) 成立,则由强马尔可夫性知

$$\lim_{t\to\infty}E_A\hat{\mu}(A_t)=E_A[\lim_{t\to\infty}E_{A_\tau}\hat{\mu}(A_t)]$$

再由 $|A_\tau|=1$ 及 (6.4) 知 (设 $A_\tau=\{u_\tau\}$)

$$\lim_{t\to\infty}E_{A_\tau}\hat{\mu}(A_t)=\lim_{t\to\infty}E_{u_\tau}\hat{\mu}(\{X_{u_\tau}(t)\})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sum_v p_t(u_\tau,v)\hat{\mu}(\{v\})=\lambda.$$

由上两式即知 (9.2) 成立. 今再证 (9.3). 设 $\tau_k\triangleq\tau_k(A)$ 为第 2 目所定义，则 τ_k 是不降停时序列; 由引理 2 的定义及 $X_u(t)$, $u\in A$, 以概率 1 两过程相遇 (因 $g(u,v)\equiv 1$!). 所以必有一有限正整数 n_0 存在使 $\tau=\tau_{n_0}$a. e. ($\tau_{n_0+1}=\infty$) 任取定 $u,v\in A$, 令 $\tau_{(u,v)}\triangleq\inf\{t>0:\ X_u(t)=X_v(t)\}$, 则 $\tau_1\leqslant\tau_{(u,v)}$ 且由

$g(u,v)\equiv 1$ 知 $P_A(\tau_{(u,v)}<\infty)=1$，故

$$P_A(\tau_1<\infty)=1.$$

类似地，可证：

$$P_{A_{\tau_k}}((\tau_{k+1}-\tau_k)<\infty)=1,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n_0-1.$$

于是由 $\{\tau_k<\infty\}\in\mathscr{F}_{\tau_k}$ 及强马尔可夫性知当 $k\leqslant n_0-1$ 时

$$P_A(\tau_{k+1}<\infty)=\int_{\{\tau_k<\infty\}}P_A(\tau_{k+1}-\tau_k<\infty\mid\mathscr{F}_{\tau_k})dP_A$$

$$=\int_{\{\tau_k<\infty\}}P_{A_{\tau_k}}(\tau_{k+1}-\tau_k<\infty)dP_A=P_A(\tau_k<\infty),$$

故 (9.3) 成立.

2° 再证 (i) 注意 (6.1), (6.2) 的充分性已在引理 8 中证明. 今往证它们的必要性. 由 $\mu_t\Rightarrow\mu_\alpha$ 知 $\forall A\in\mathscr{S}$

$$\hat{\mu}_t(A)=E_A\hat{\mu}(A_t)\to\hat{\mu}_\alpha(A), \tag{9.4}$$

当 $A=\{u\}$ 时，

$$E_A\hat{\mu}(A_t)=E_u\hat{\mu}(\{X_u(t)\})=\sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v\})\cdot$$

而 $\hat{\mu}_\alpha(A)=\hat{\mu}_\alpha(\{u\})=\mu_\alpha\{\eta:\eta(u)=0\}=\alpha(u)$ (引理 7(iv)),故由 (9.4) 知条件 (6.1) 的必要性获证. 剩下只要证 (6.2) 的必要性. 今往证之

首先注意：$\forall x\in S$,

$$0\leqslant\int\Big[\sum_u p_t(x,u)(1-\eta(u))-\alpha(x)\Big]^2\mu(d\eta)$$

$$=\sum_{u,v}p_t(x,u)p_t(x,v)\hat{\mu}(\{u,v\})+\alpha^2(x)$$

$$-2\alpha(x)\sum_u p_t(x,u)\hat{\mu}(\{u\})$$

由 (6.1) (已证)得

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{u,v}p_t(x,u)p_t(x,v)\hat{\mu}(\{u,v\})\geqslant\alpha^2(x).$$

因此要证 (6.2) 需证

$$\varlimsup_{t\to\infty}\sum_{u,v}p_t(x,u)p_t(x,v)\hat{\mu}(\{u,v\})\leqslant\alpha^2(x).$$

设 $\{X(t):t\geqslant 0\}$, $\{Y(t):t\geqslant 0\}$ 满足引理 3 的假设,即相互独立的以 S 为态空间以 $P(t)=e^{(P-I)t}$ 为转移概率的马链. 于是归结为要证:

$$\varlimsup_{t\to\infty}E_{(x,x)}[\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})-\alpha(X(t))\alpha(Y(t))]\leqslant 0.$$

为了证明此式,分别考虑上式中的随机变量在 E 与 E^c 上的数学期望,其中 E 为引理 3 中所定义的集,即证明: $\forall x,y\in S$,

(9.5) $\lim\limits_{t\to\infty}E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})-\alpha(X(t))\alpha(Y(t)),\ E]\leqslant 0,$

(9.6) $\lim\limits_{t\to\infty}E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})-\alpha(X(t))\alpha(Y(t)),\ E^c]=0.$

令 $\sigma_0\triangleq 0$, $\tau_n\triangleq\inf\{t>\sigma_{n-1}:X(t)=Y(t)\}$, $\sigma_n=\inf\{t>\tau_n: X(t)\neq Y(t)\}$, $n\geqslant 1$, 则$\sigma_{n-1}\leqslant\tau_n\leqslant\sigma_n, n\geqslant 1$, σ_n, τ_n 都是停时且有

$$(9.7)\quad E^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{S>n}\{X(s)\neq Y(s)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{n-1}<\infty,\tau_n=\infty\}.$$

由 (6.1) 及强马尔可夫性知: $\forall n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}(9.8)\quad &\lim_{t\to\infty}E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t)\})-\alpha(X(t)),\ \sigma_{n-1}<\infty,\ \tau_n<\infty]\\ &=\lim_{t\to\infty}E_{(x,y)}[E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t)\})\\ &\qquad-\alpha(X(t))|\mathscr{F}_{\tau_n}],\ \sigma_{n-1}<\infty,\ \tau_n<\infty]\\ &=E_{(x,y)}[\lim_{t\to\infty}E_{X(\tau_n)}[\hat{\mu}(\{X(t)\}\\ &\qquad-\alpha(X(t))],\sigma_{n-1}<\infty,\tau_n<\infty]=0.\end{aligned}$$

再由 (6.1) 知 $\forall n\geqslant 1$ 有

(9.9) $\quad\lim\limits_{t\to\infty}E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t)\})-\alpha(X(t)),\ \sigma_{n-1}<\infty,$

$$\tau_n = \infty] = 0.$$

故由 (9.7), (9.9) 及控制收敛定理得知: $\forall x, y \in S$, 有

(9.10) $$\lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t)\}) - \alpha(X(t)), E^c] = 0.$$

因而由 (6.1) 有

(9.11) $$\lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t)\}) - \alpha(X(t)), E] = 0.$$

再由 $\hat{\mu}(\{u, v\}) = \mu(\{\eta : \eta(u) = \eta(v) = 0\})$
$\leqslant \mu(\{\eta: \eta(u) = 0\}) = \hat{\mu}(\{u\})$, $\alpha \in \mathscr{H}^*$ (因而在 E 上

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(X(t))\alpha(Y(t)) = [\lim_{t\to\infty}\alpha(X(t))]^2 = \lim_{t\to\infty}\alpha(X(t)))$$

及 (9.11) 得 (9.5)。

为证 (9.6), 首先注意 (8.1) $\Longrightarrow$ (8.2), 再在 (8.2) 中, 令 $A = \{x, y\}$, $x \neq y$, 即得

(9.12) $$\lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t))] = 0.$$

类似于 (9.8) 的证明可得: $\forall n \geqslant 1$ 有

$$\lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t)),$$
$$\sigma_{n-1} < \infty, \tau_n < \infty] = 0$$

由此式及 (9.12) 得: $\forall n \geqslant 1$ 有

(9.13) $$\lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t)),$$
$$\sigma_{n-1} < \infty, \tau_n = \infty] = 0$$

由 (9.7), (9.13) 及控制收敛定理即得 (9.6). □

为了证明定理 5, 我们从证明下列有独立兴趣的引理开始.

10. 引理 设 $Q = (q(u, v): u, v \in S)$ 是保守 Q 矩阵, 且 $c \triangleq \sup|q(u, u)| < \infty$, $Q(t) = (q_t(u, v); u, v \in S)$ 是它的 Q 过程的转移概率. 若有 S 上的有界数 f 及某一序列 $t_n \to \infty$ 使 $\forall u \in S$

$$g(u) \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_v q_{t_n}(u, v) f(v)$$

存在, 则 $g: S \to R$ 是 $Q(t)$ 的有界调和函数, 即

$$\sum_{v} q_t(u, v)g(v) = g(u), \forall u \in S, t \geqslant 0.$$

证. 要证引理，只需证：$\forall u \in S$，$s \geqslant 0$

$$(10.1) \quad \lim_{t\to\infty} \sum_{v} |q_{t+s}(u, v) - q_t(u, v))| = 0.$$

定义 $P \triangleq I + c^{-1}Q$，则 P 是 S 上的随机矩阵，且 $Q = c(P - I)$，于是 $Q(t) = e^{Qt} = e^{-ct}e^{cPt}$. 即

$$(10.2) \quad q_t(u, v) = e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} p^{(n)}(u, v), \ u, v \in S, , t \geqslant 0$$

由此易见要证 (10.1) 只需证：$\forall s \geqslant 0$

$$(10.3) \quad \lim_{t\to\infty} e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \left| e^{-cs}\left(1 + \frac{s}{t}\right)^n - 1 \right| = 0.$$

为了证明 (10.3)。设 $\{N(t): t \geqslant 0\}$ 为具参数 c 的普哇松过程，则

$$(10.4) \quad e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \left| e^{-cs}\left(1 + \frac{s}{t}\right)^n - 1 \right|$$
$$= E\left| e^{-cs}\left(1 + \frac{s}{t}\right)^{N(t)} - 1 \right|,$$

而 $E[t^{-1}N(t) - c]^2 = t^{-2}E[N(t) - EN(t)]^2 = t^{-1}c \to 0$（当 $t \to \infty$），故 $t^{-1}N(t) \xrightarrow{P} c$，因而

$$(10.5) \quad \left(1 + \frac{s}{t}\right)^{N(t)} = \left[\left(1 + \frac{s}{t}\right)^t\right]^{t^{-1}N(t)} \xrightarrow{P} e^{cs}.$$

另一方面容易计算

$$(10.6) \quad E\left[\left(1 + \frac{s}{t}\right)^{N(t)}\right] = e^{-ct} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k$$
$$= e^{-ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cs)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ct)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{cs}$$

由 (10.4)—(10.6) 及 L_1 收敛定理即得 (10.1)。□

由于选举过程的对偶链 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 的 $|A_t|$ 不增，于是引理 10 有下列的推论：

11. 引理 设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是选举模型马氏半群，$\nu \in \mathscr{P}(X)$. 若 $\exists \{t_n\} \subset [0, \infty)$，$t_n \to \infty$ 及 $\mu \in \mathscr{P}(X)$ 使

$$\nu S(t_n) \Longrightarrow \mu (n \to \infty)，则 \ \mu \in \mathscr{I}.$$

证. 由于对选举模型来说 $\hat{\mu}_t(A) = E_A \hat{\mu}(A_t)$，故为证引理，只需证：$\hat{\mu}(A) = E_A \hat{\mu}(A_t)$，即 $\{\hat{\mu}(A): A \in \mathscr{S}\}$ 是 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 的调和函数. 而由假设知

$$(11.1) \quad \forall A \in \mathscr{S}, \hat{\mu}(A) = \lim_{n\to\infty} \hat{\nu}_{t_n}(A) = \lim_{n\to\infty} E_A \hat{\nu}(A_{t_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{B\in\mathscr{S}} p(t_n, A, B) \hat{\nu}(B).$$

其中 $p(t, A, B)$ 是 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 的转移概率. 因此自然想到设法应用引理 10 来证明本引理.

为此首先注意由引理 2 知选举模型的对偶链 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 满足 $|A_t| \leqslant |A_0|$，从而 $p(t, A, B) = 0$ 当 $|B| > |A|$. 故对任何自然数 k, $P_k(t) \triangleq (p(t, A, B), A, B \in \mathscr{S}_k)$, $\mathscr{S}_k \triangleq \{A \in \mathscr{S}: |A| \leqslant k\}$, 是 Q 过程，它的 Q 矩阵由 (1.3) 定义，不过其中 $A, B \in \mathscr{S}_k$. 于是由 (1.3) 知

$$\sup\{|q(A, A)|: A \in \mathscr{S}_k[= \sup \left\{\sum_{u\in A} (1 - p(u, u)): A \in \mathscr{S}_k\right\}$$

$$\leqslant k < \infty.$$

即 $P_k(t)$ 满足引理 10 的条件. 因此由引理 10 得知当 $|A| \leqslant k$ 时 $\left(注意此时 (11.1) 中的 \sum_{B\in\mathscr{S}} 可改为 \sum_{B\in\mathscr{S}_k}\right)$

$$\hat{\mu}(A) = \sum_{B\in\mathscr{S}_k} p(t, A, B) \hat{\mu}(B) = \sum_{B\in\mathscr{S}} p(t, A, B) \hat{\mu}(B).$$

由于 k 可任意，故引理获证. □

下面两条引理是辨识选举模型的 $\mathscr{I}$ 的元的关键。它们断言：对 $\mu\in\mathscr{I}$，坐标 $\eta(u)$，$u\in S$，在一定意义下渐近地独立。

12. 引理 设 P 不可约。若 $\mu\in\mathscr{I}$，则 $\forall u, w\in S$，有

$$(12.1)\quad \lim_{t\to\infty}\sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v,w\})=\hat{\mu}(\{u\})\hat{\mu}(\{w\}).$$

证. 当 $\mu=\nu_0$，ν_1 时，$\hat{\mu}(\{v,w\})=\hat{\mu}(\{v\})\hat{\mu}(\{w\})$，于是 (12.1) 的左边等于

$$\left[\sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v\})\right]\hat{\mu}(\{w\})=E_{\{u\}}\hat{\mu}(\{X(t)\})\hat{\mu}(\{w\})$$

$$=\hat{\mu}(\{u\})\hat{\mu}(\{w\}).$$

以下设 $\mu\neq\nu_0,\nu_1$。

由 $\hat{\mu}(\{u\})=\hat{\mu}_t(\{u\})=E_{\{u\}}\hat{\mu}(A_t)=E_u\hat{\mu}(\{X(t)\})$ 知

$$(12.2)\quad \hat{\mu}(\{u\})=\sum_v p_t(u,v)\hat{\mu}(\{v\}),\ u\in S,\ t>0$$

由 P 不可约知 $\forall\ u,v\in S$，$t>0$，$p_t(u,v)>0$。于是

$$(12.3)\qquad 0<\hat{\mu}(\{u\})<1,\ \forall u\in S.$$

事实上，若 $\exists u\in S$ 使 $\hat{\mu}(\{u\})=1$，则

$$\sum_v p_t(u,v)(1-\hat{\mu}(\{v\}))=0,$$

由 $p_t(u,v)>0$ 知 $\forall v\in S$，$1-\hat{\mu}(\{v\})=\mu\{\eta:\eta(v)=0\}$，故 $\mu=\nu_0$，这与 $\mu\neq\nu_0$ 矛盾。若 $\exists u\in S$ 使 $\hat{\mu}(\{u\})=0$，则 $\mu=\nu_1$，亦与 $\mu\neq\nu_1$ 矛盾。

固定 $w\in S$，令

$$\lambda\triangleq\hat{\mu}(\{w\})\in(0,1),\ \mu_i(\cdot)=\mu(\cdot\,|\eta(w)=i)\ \ i=0,1,$$

则
$$\mu=\lambda\mu_0+(1-\lambda)\mu_1$$

因而 $\forall t\geqslant 0$

$$(12.4)\qquad \mu=\mu S(t)=\lambda\mu_0S(t)+(1-\lambda)\mu_1S(t).$$ 由

附录引理 3.8 知 $\exists\{t_n\}\subset[0,\infty)$，$t_n\uparrow\infty$ 及 $\bar{\mu}_0\in\mathscr{P}(X)$ 使

$\mu_0 S(t) \Longrightarrow \bar{\mu}_0$，因而由 (12.4) 得知

$$\mu_1 S(t_n) \Longrightarrow \bar{\mu} \triangleq \frac{\mu - \lambda\bar{\mu}_0}{1-\lambda}.$$

由引理 11 知 $\bar{\mu}_0$，$\bar{\mu}_1 \in \mathscr{I}$，再由 $\lambda\bar{\mu}_0 + (1-\lambda)\bar{\mu}_1 = \mu \in \mathscr{I}$，知

$$\mu = \bar{\mu}_i = \lim_{n\to\infty} \mu_i S(t_n), i = 0,1.$$

其中上式右边的极限为测度弱收敛极限。而且由上面证法知，$\forall\{t'_n\}\subset[0, \infty)$，$t'_n \uparrow \infty$ 使 $\mu_0 S(t'_n)$ 测度弱收敛，则必有

$$\mu_i S(t'_n) \Rightarrow \mu, \quad i = 0, 1.$$

故由附录引理 3.6 知

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \mu_i S(t), \quad i = 0, 1.$$

于是由 μ_0 的定义知

(12.5) $$\hat{\mu}(\{u\}) = \lim_{t\to\infty} (\hat{\mu}_0)_t(\{u\}) = \lim_{t\to\infty} E_u \hat{\mu}_0(\{X(t)\})$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_v p_t(u, v)\hat{\mu}_0(\{v\})$$

而

$$\hat{\mu}_0(\{v\}) = \mu_0(\{\eta(t) = 0\})$$

$$= \frac{\mu(\eta(v) = 0, \eta(w) = 0\})}{\mu(\{\eta(w) = 0\})} = \frac{\hat{\mu}(\{v, w\})}{\hat{\mu}(\{w\})}$$

将此式代入(12.5)即得(12.1)。□

13. 引理 设 P 不可约。若 $\mu \in \mathscr{I}$，则 $\forall u, v \in S$

(13.1) $$E_{(u,v)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) \searrow \alpha(u)\alpha(v)(t \to \infty),$$

其中 $\alpha(u) = \hat{\mu}(\{u\})$。

证. 1° 由引理 2(ii) 知当 $A_0 = \{X(0), Y(0)\}$ 时，可使 $A_t \subset \{X(t), Y(t)\} \forall t \geqslant 0$ 成立，于是由 $\mu \in \mathscr{I}$ 知

(13.2) $$E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) \leqslant E_{(x,y)}\hat{\mu}(A_t) = \hat{\mu}(\{x, y\}),$$

$\forall x, y \in S$，$t \geqslant 0$ 成立。再由 (13.2) 及时齐马尔可夫性得知 $\forall x, y \in S$，$t > s \geqslant 0$ 有

$$
\begin{aligned}
E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) &= E_{(x,y)}[E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t),\\
&\qquad Y(t)\})|(X(r), Y(r)), r \leqslant s]]\\
&= E_{(x,y)}[E_{(X(s),Y(s))}\hat{\mu}(\{X(t-s), Y(t-s)\})\\
&\leqslant E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(s), Y(s)\}).
\end{aligned}
$$

这就证明 (13.1) 中下降性结论．于是由 (13.2) 知 $\forall x, y \in S$，存在 $h(x, y)$ 使

(13.3) $$h(x,y) = \lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) \leqslant \hat{\mu}(\{x, y\}).$$

所以要完成引理的证明，只需证

(13.4) $$h(x,y) = \alpha(x)\alpha(y), \forall x, y \in S.$$

由 $\alpha(x) = \hat{\mu}(\{x\}) = \mu(\{\eta:\eta(x) = 0\})$ 及 (12.2) 知

$$
\begin{aligned}
\alpha^2(x) &= \left(E_\mu\left[\sum_v p_t(x, v)(1-\eta(v))\right]\right)^2\\
&\leqslant E_\mu\left[\sum_v p_t(x, v)(1-\eta(v))\right]^2\\
&= \sum_{u,v} p_t(x,u)p_t(x, v)\mu(\{\eta:\eta(u) = \eta(v) = 0\})\\
&= \sum_{u,v} p_t(x, u)p_t(x, v)\hat{\mu}(\{u, v\})\\
&= E_{(x,x)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}).
\end{aligned}
$$

上式左边与 t 无关，右边当 $t\to\infty$ 时极限为 $h(x, x)$，故令 $t\to\infty$ 即得

(13.5) $$\alpha^2(x) \leqslant h(x, x), \forall x \in S.$$

类似地计算可得

$$
\begin{aligned}
&[E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) - \alpha(x)\alpha(y)]^2\\
&\quad = \left[E_\mu\left[\sum_u p_t(x,u)(1-\eta(u)) - \alpha(x)\right]\right.\\
&\qquad \left.\cdot\left[\sum_v p_t(y,v)(1-\eta(v)) - \alpha(y)\right]\right]^2
\end{aligned}
$$

$$\leqslant E_\mu\left[\sum_u p_t(x,u)(1-\eta(u)-\alpha(x)\right]^2$$

$$\cdot E_\mu\left[\sum_v p_t(y,v)(1-\eta(v))-\alpha(y)\right]^2$$

$$=[E_{(x,x)}\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})-\alpha^2(x)]$$

$$\cdot[E_{(y,y)}\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})-\alpha^2(y)]$$

令 $t\to\infty$，由 (13.3) 即得

(13.6) $\quad [h(x,y)-\alpha(x)\alpha(y)]^2\leqslant[h(x,x)-\alpha^2(x)][h(y,y)-\alpha^2(y)],\ \forall x,\ y\in S$

由 (13.5), (13.6) 知：若能证明：

(13.7) $\qquad h(x,x)\leqslant\alpha^2(x),\ \forall x\in S,$

则 (13.4) 成立，因而引理获证.

2° 下面我们证明形式上比(13.7)稍广一点(实际上由 (13.5), (13.6) 知是等价的)的结论:

(13.8) $\qquad h(x,y)\leqslant\alpha(x)\alpha(y),\ \forall x,\ y\in S.$

为此首先由 (13.3) 及马尔可夫性得知: $\forall x,\ y\in S$，有

$$\sum_{u,v}p_t(x,u)p_t(y,v)h(u,v)=E_{(x,y)}h(X(t),Y(t))$$

$$=\lim_{s\to\infty}E_{(x,y)}E_{(X(t),Y(t))}\hat{\mu}(\{X(s),\ Y(s)\})$$

$$=\lim_{s\to\infty}E_{(x,y)}[E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t+s),$$

$$Y(t+s)\})|(X(r),Y(r)),r\leqslant t]]$$

$$=\lim_{s\to\infty}E_{(x,y)}\hat{\mu}(\{X(t+s),\ Y(t+s)\})=h(x,y).$$

在上式两边对 t 求 $t=0$ 处的导数即得

$$0=\sum_{u,v}[(p(x,u)-\delta(x,u))\delta(y,v)+\delta(x,u)(p(y,v)-\delta(y,v))]h(u,v)$$

即

(13.9) $$h(x, y)=\frac{1}{2}\sum_u p(x, u)h(u, y)+\frac{1}{2}\sum_v p(y, v)h(x, v),\ \forall x, y\in S.$$

由 (13.9) 及下面将要证明的引理 14 立刻得到:

(13.10) $$h(x, y)=\sum_u p(x, u)h(u, y),\ \forall x, y\in S.$$

由 (13.10) 出发,应用数学归纳法可证:

$$h(x, y)=\sum_u p^{(n)}(x, u)h(u, y),\ \forall x, y\in S, n\in Z_+$$

成立。因此 $\forall x, y\in S, t\geqslant 0$

(13.11) $$h(x, y)=\sum_u \left[e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}p^{(n)}(x, u)\right]h(u, y)=\sum_u p_t(x, u)h(u, y)$$

成立。由 (13.11), (13.3) 及引理 12 即得

$$h(x,y)\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\sum_u p_t(x, u)\hat{\mu}(\{u, y\})=\hat{\mu}(\{x\})\hat{\mu}(\{y\})=\alpha(x)\alpha(y)$$

此即 (13.18)。故引理获证。□

14. 引理 (i) 设 $(p_i(u, v); u, v\in S)=P_i, i=1, 2$, 是 S 上的随机矩阵,在

$$l^\infty(S)\triangleq\{f:S\to R, \|f\|\triangleq\sup_u|f(u)|<\infty\}$$

上定义算子 $P_i, i=1, 2$ 如下

(14.1) $$(P_if)(u)=\sum_{v\in S}p_i(u, v)f(v),\ u\in S, f\in l^\infty(S).$$

若 $P_1P_2=P_2P_1$, 则 $\forall f\in l^\infty(S)$, 当且仅当 $P_if=f, i=1, 2$ 时, f 具有下列性质: $\exists\alpha_1, \alpha_2>0, \alpha_1+\alpha_2=1$ 使

(14.2) $$(\alpha_1P_1+\alpha_2P_2)f=f.$$

(ii) 设 $p=(p(u,v):u,v\in S)$为一随机矩阵,若 $h\in l^\infty(S\times S)$ 且满足 (13.9), 则 (13.10) 成立.

证. (i)条件的充分性显然，往证必要性. 固定 α_1, α_2(>0 且 $\alpha_1+\alpha_2=1$), 并令

$$H\triangleq\{f\in l^\infty(S):\|f\|\leqslant 1 \text{ 且 } (\alpha_1P_1+\alpha_2P_2)f=f\}$$

任取 $f\in H$, 则且 P_1, P_2 可换知

$$P_if=P_i(\alpha_1P_1+\alpha_2P_2)f=(\alpha P_1+\alpha_2P_2)P_if,\ i=1,2.$$

故 $P_i(H)\subset H$, $i=1$, 2. 由于H在逐点收敛拓扑下是凸紧集, H是它的极点集的凸闭包 (Krein-Milman 定理,见[7, 书 XII 章 § 1]) 设 f 是H的任一极点,则 $f=\alpha_1(P_1f)+\alpha_2(P_2f)$. 因 $P_if\in H$, $\alpha_i>0$, $i=1$, 2, f 又是极点,故 $f=P_if$, $i=1$, 2. 即 (i) 的结论对H的任何极点成立. 而H是它的极点集的闭凸包,所以 (i) 的结论 $\forall f\in H$ 成立,即 (i) 获证.

(ii) 将 (i) 的S换成 $S\times S$, $\forall f\in l^\infty(S\times S)$, 定义

$$(P_1f)(x,y)\triangleq\sum_u p(x,u)f(u,y),$$

$$(P_2f)(x,y)\triangleq\sum_v p(y,v)f(x,v).$$

则易算出: $\forall x$, $y\in S$,

$$(P_2P_1)f(x,y)=\sum_v p(y,v)\sum_u p(x,u)f(u,v)$$
$$=(P_1P_2)f(x,y),$$

即 $P_1P_2=P_2P_1$. 又由引理 13 知 $h\in l^\infty(S\times S)$, 由 (13.9)

$$h=\frac{1}{2}P_1h+\frac{1}{2}P_2h.$$

故由 (i) 知

$$h(x,y)=(P_1h)(x,y)=\sum_u p(x,u)h(u,x)$$

这就是(13.10). □

15. 现在我们来完成定理 5 的证明. 由于定理 5 的 (i) (ii) 在引理 7 中已证,只需证 (iii). 为此取 $\alpha \in \mathscr{K}^*$, 并设:

(15.1) $\mu_\alpha = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2,\ \lambda \in (0,1),\ \mu_1, \mu_2 \in \mathscr{I}.$

由定理 5(i) 知 $\mu_\alpha \in \mathscr{I}$, 因而由定理 6(i) 知

(15.2) $$E_{\mu_\alpha}\left[\sum_v p_t(u,v)(1-\eta(v)) - \alpha(u)\right]^2 \to 0\ (t\to\infty)$$

(注意此式与 (6.1)、(6.2) 两式等价). 由 (15.1) 知 (15.2) 中的 μ_α 换成 μ_i, $i=1, 2$, 也成立,故再由定理 6(i) 知

$$\lim_{t\to\infty} \mu_i S(t) = \mu_\alpha,\ i=1, 2,$$

从而 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_\alpha$, 即 $\mu_\alpha \in \mathscr{I}_e$. 因此剩下要证明的是

(15.3) $$\mathscr{I}_e \subset \{\mu_\alpha : \alpha \in \mathscr{K}^*\}$$

取 $\mu \in \mathscr{I}_e$,并令 $\alpha(u) \triangleq \hat{\mu}(\{u\})$. 则由对偶方程知 $\alpha \in \mathscr{K}$. 于是要证 $\alpha \in \mathscr{K}^*$ 及 $\mu = \mu_\alpha$, 为此先证:

(15.4) $$\hat{\mu}(\{X(t), Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t)) \underset{(t\to\infty)}{\longrightarrow} 0\ \ \text{a. e}(P_{(x,y)}).$$

事实上, 由马尔可夫性、(13.2) 及 $\alpha \in \mathscr{K}$ 知: $\forall x,\ y \in S,\ t > s \geqslant 0$

$$\begin{aligned}&E_{(x,y)}[\hat{\mu}(\{X(t),Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t)) \mid (X(r),Y(r)), r\leqslant s]\\ &= E_{(X(s),Y(s))}[\hat{\mu}(\{X(t-s),\ Y(t-s)\})\\ &\qquad - \alpha(X(t-s))\alpha(Y(t-s))] \leqslant \hat{\mu}(\{X(s),\ Y(s)\})\\ &\qquad - \alpha(X(s))\alpha(Y(s))\end{aligned}$$

即 $M(t) \triangleq \hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\}) - \alpha(X(t))\alpha(Y(t))$, $t \geqslant 0$, 是一上鞅. 因而由鞅收敛定理知 $\exists M(\infty)$ 使当 $t\to\infty$时,

(15.5) $$M(t) \to M(\infty)\ \text{a. e.}$$

成立,再由引理 13 取 $t=0$ 知 $\alpha(x)\alpha(y) \leqslant \hat{\mu}(\{x,y\})$. 故 $M(t)$, $t \in [0,\ \infty]$, 非负有界. 于是再由引理 13 及 (15.5) 知

$$0 = \lim_{t\to\infty} E_{(x,y)}[M(t)] = E_{(x,y)}[M(\infty)],$$

因而 $M(\infty) = 0$ a. e., 即 (15.4) 成立.

另一方面，由引理 2 知可以构造 A_t 具有如下性质：若 $A_0=\{X(0),\ Y(0)\}$ 则当 $|A_t|=1$ 时，$A_t=\{X(t)\}$，于是由引理 2，对偶方程及 $\mu\in\mathscr{I}$ 知

$$\begin{aligned}\alpha(x)-\hat{\mu}(\{x,\ y\}) &= E_{\{x\}}\hat{\mu}(A_t)-E_{\{x,y\}}\hat{\mu}(A_t)\\ &= E_{\{x,y\}}[\hat{\mu}(\{X(t)\})-\hat{\mu}(A_t)]I_{\{|A_t|=1\}}\\ &\quad + E_{\{x,y\}}[\hat{\mu}\{X(t)\})-\hat{\mu}(A_t)]I_{\{|A_t|=2\}}\\ &= E_{\{x,y\}}[\hat{\mu}(\{X(t)\})-\hat{\mu}(A_t)]I_{\{|A_t|=2\}}\\ &\leqslant P_{\{x,y\}}(|A_t|=2)\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$，即得

$$0\leqslant\alpha(x)-\hat{\mu}(\{x,\ y\})\leqslant 1-g(x,\ y),\ \forall x,\ y\in S.$$

故由引理 3 知：在 E（由引理 3 定义)上

(15.6) $\quad \alpha(X(t))-\hat{\mu}(\{X(t),\ Y(t)\})\to 0,\ \text{a. e.}\ (t\to\infty).$

由 (15.4) 及 (15.5) 得知：在 E 上

(15.7) $\quad \alpha(X(t))(1-\alpha(Y(t)))\to\theta,\ \text{a. e.}\ (t\to\infty)$

因为 $\alpha\in\mathscr{K}$，$\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(X(t))$，$\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(Y(t))$，a. e. 存在，故

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(X(t))=\lim_{t\to\infty}\alpha(Y(t)),\ \text{a. e.}\ (\text{在}\ E\ \text{上})$$

从而由 (15.6) 知：当 $t\to\infty$ 时，

$$\alpha(X(t))(1-\alpha(X(t)))\to 0,\ \text{在}\ E\ \text{上 a. e.}$$

于是 $\alpha\in\mathscr{H}^*$. 剩下的只是要证

(15.8) $$\mu=\mu_\alpha.$$

但由 $\alpha\in\mathscr{H}$ 知 (6.1) 成立，由引理 13 知 (6.2) 成立，从而由定理 6(i)知 $\lim\limits_{t\to\infty}\mu S(t)=\mu_\alpha$，最后由 $\mu\in\mathscr{I}$ 知 (15.7) 成立。□

§4 接触过程的临界值

本节讨论接触过程的临界值的估计，证明对基本接触过程有

$$(0.1)\qquad \frac{1}{2d-1}\leqslant \lambda_c^{(d)}\leqslant \frac{2}{d}$$

其中 $\lambda_c^{(d)}$ 为 $\{0, 1\}^{Z^d}$ 上的接触过程的临界值，先用对偶方法讨论临界值的下界估计及有关性质．然后用构造 $\neq \nu_0$ 的不变测度的办法证明 $\lambda_c^{(d)}\leqslant 2$．最后证明 (0.1) 的右边．

由推论 2.6 知要讨论模型 $c(u, \eta)=c_1(u, \eta)$ 的遍历性，若 $b(u)\equiv 1$，$u\in S$ 且 $\forall A\ni\infty$，$p(u, A)=0$，则只需讨论

$$(0.2)\qquad P_{(u)}(\tau=\infty)=0$$

的条件．其中

$$(0.3)\qquad \tau\triangleq\inf\{t>0, A_t\in\{\phi, \{\infty\}\}\}$$

其中 $\{A_t: t\geqslant 0\}$ 是模型 $c_1(u, \eta)$ 的对偶链．为此先证

1. 引理 采用上段的记号与假设．令

$$(1.1)\qquad \sigma(A)\triangleq P_A(\tau=\infty),\ A\in\mathscr{S}$$

则有 $\sigma(\phi)=0$ 及

$$(1.2)\qquad \forall A, B\in\mathscr{S},\ \sigma(A)+\sigma(B)\geqslant\sigma(A\cup B)+\sigma(A\cap B).$$

证． 设 $\nu\in\mathscr{P}(X)$ 为由 (2.3.1) 决定的概率测度．则由推论 2.6 的证 1° 知 $\forall A\in\mathscr{S}$，

$$\hat{\nu}(A)=P_A(\tau<\infty)=1-\sigma(A)$$

因此显然有 $\sigma(\phi)=0$ 而要证 (1.2) 只需证

$$(1.3)\qquad \forall A, B\in\mathscr{S},\ \hat{\nu}(A)+\hat{\nu}(B)\leqslant\hat{\nu}(A\cap B)+\hat{\nu}(A\cup B).$$

而由

$$\hat{\nu}(A)=\int H_1(\eta, A)\nu(d\eta)$$

及

$$(1.4)\qquad \forall A, B\in\mathscr{S},\ H_1(\eta, A)+H_1(\eta, B)\leqslant H_1(\eta, A\cup B)+H_1(\eta, A\cap B)$$

立知 (1.3) 成立．而 (1.4) 的正确性由 $H_1(\eta, A)$ 的定义分别下列四种情形验证即可，(i) $\exists u\in A\cap B$ 使 $\eta(u)=1$；(ii) $\exists u\in A\backslash B$ 使 $\eta(u)=1$，(iii) $\exists u\in B\backslash A$ 使 $\eta(u)=1$；(iv) $\forall u\in A\cup B$，

$\eta(u)=0$. □

2. 引理 (i) 采用本节开始及引理 1 的记号与假设。 $Q=(q_1(A, B): A, B\in\mathscr{S})$ 按 (1.4.12) 定义，则有

(2.1) $\forall A\in\mathscr{S},\ q_1(A)\sigma(A)=\sum\limits_{B\in\mathscr{S}\setminus\{A\}} q_1(A, B)\sigma(B).$

(ii) 若还设 $c_1(u, \eta)$ 为接触过程的速度函数，则

(2.2) $$\forall A\in\mathscr{S},\ \sigma(A)=\frac{1}{|A|(1+\lambda)}\sum_{u\in A}\Big[\sigma(A\setminus u)+\lambda\sum_{v\in S}p(u, v)\sigma(A\cup v)\Big].$$

证. (i) 设 $p(t, A, B), A, B\in\bar{\mathscr{S}}$ 为模型 $c_1(u, \eta)$ 的对偶链的转移概率，则由推论 2.6 的证 1° 知当 $A\not\ni\infty$, $B\ni\infty$ 时 $p(t, A, B)=0$, $\forall t\geqslant 0$, 成立。故在目前假设条件下，$(p(t, A, B): A, B\in\mathscr{S})$是概率转移函数，且由 $\nu\in\mathscr{I}(c_1(\cdot,\cdot))$(引理 2.3) 及对偶方程知

$$\hat{\nu}(A)=E_A\hat{\nu}(A_t)=\sum_{B\in\mathscr{S}}p(t, A, B)\hat{\nu}(B),\ A\in\mathscr{S},$$

即

$$\sigma(A)=\sum_{B\in\mathscr{S}}p(t, A, B)\sigma(B),\ A\in\mathscr{S}.$$

对两边在 $t=0$ 求导即得

$$\Sigma q_1(A, B)\sigma(B)=0,\ A\in\mathscr{S},$$

此即 (2.1)。

(ii) 若 $c_1(u, \eta)=1$, 当 $\eta(u)=1$; $=\lambda\sum\limits_{v}p(u,v)\eta(v)$, 当 $\eta(u)=0$, 则由 § 1 例 2(b) 及 (1.4.12) 知：当 $A\in\mathscr{S}$ 时

$$q_1(A, B)=\sum_{u\in A}c(u)\sum_{F\cup(A\setminus u)=B}p(u, F)$$

$$
=\begin{cases}1, & B=A\backslash u,\ u\in A,\\ \lambda\sum\limits_{u\in A}p(u,v), & B=A\cup v,\ v\notin A,\\ 0, & \text{其它 } B\neq A.\end{cases}
$$

由此可算出

$$
q_1(A)=\sum_{B\neq A}q_1(A,B)=|A|(1+\lambda)-\lambda\sum_{u\in A}\sum_{v\in A}p(u,v),
$$

$$
\sum_{B\neq A}q_1(A,B)\sigma(B)
$$

$$
=\sum_{u\in A}\left[\sigma(A\backslash u)+\lambda\sum_{v\notin A}p(u,v)\sigma(A\cup v)\right]
$$

于是由 (2.1) 即得

$$
|A|(1+\lambda)\sigma(A)=\lambda\sum_{u\in A}\sum_{v\in A}p(u,v)\sigma(A\cup v)
$$

$$
+\sum_{B\neq A}q_1(A,B)\sigma(B)
$$

$$
=\sum_{u\in A}\left[\sigma(A\backslash u)+\lambda\sum_{v}p(u,v)\sigma(A\cup v)\right].
$$

两边除以 $|A|(1+\lambda)$ 即得 (2.2)。□

3. 定理 设 $S=Z^d$，

$$
c(u,\eta)=\begin{cases}1, & \eta(u)=1\\ \lambda\sum\limits_{|v-u|=1}\eta(v), & \eta(u)=0.\end{cases}
$$

则

$$
\lambda_c^{(d)}\geqslant\frac{1}{2d-1}. \tag{3.1}
$$

证. 习知 $c(u,\eta)$ 满足本节开始的假设。于是由推论 2.6 知要证 (3.1)，只需证：

(3.2) $$\lambda < \frac{1}{2d-1} \Rightarrow \sigma(\{u\}) = 0, \forall u \in S.$$

由于

$$c(u,\ \eta) = \begin{cases} 1, & \eta(u) = 1, \\ 2\lambda d \sum\limits_{|v-u|=1} \frac{1}{2d}\eta(v), & \eta(u) = 0 \end{cases}$$

故由 (2.2) 知有

(3.3) $$\forall A \in \mathscr{S}, \sigma(A) = \frac{1}{|A| \cdot (1 + 2\lambda d)} \sum_{u \in A} \Big[\sigma(A \backslash u) + \lambda \sum_{|v-u|=1} \sigma(A \cup v) \Big].$$

由于 ν_1 及

$$p(u,\ v) = \begin{cases} 0, & |u - v| \neq 1, \\ (2d)^{-1}, & |u - v| = 1, \end{cases}$$

对于 Z^d 的平移及旋转不变，$\sigma(\{u\})$，$\sigma(\{u,\ v\})$，$|u - v| = 1$ 与 u, v 无关,因此令 $\sigma_1 \triangleq \sigma(\{u\})$,$\sigma_2 = \sigma(\{u,v\})$，$|u - v| = 1$. 又 $\sigma(\phi) = 1 - \hat{\nu}(\phi) = 0$. 于是由 (3.3) (令 $A = \{u\}$) 即得

(3.4) $$\sigma_1 = \frac{2\lambda d}{1 + 2\lambda d} \sigma_2.$$

取 $A = \{u,\ v\}$，$|u - v| = 1$，并注意当 $w \in A$，$|w - u| = 1$ 或 $|w - v| = 1$ 时由 (1.2) 得

$$\sigma(A \cup \{w\}) = \sigma(\{u,\ v,\ w\} \leqslant \sigma(\{u,\ w\}) + \sigma(\{v,\ w\}) - \sigma(\{w\}) = 2\sigma_2 - \sigma_1,$$

于是由 (3.3) 即得

$$\sigma_2 \leqslant \frac{1}{1 + 2d\lambda} [\sigma_1 + \lambda\sigma_2 + \lambda(2d - 1)(2\sigma_2 - \sigma_1)].$$

简化之即得

$$(\sigma_1 - \sigma_2)[1 - (2d - 1)\lambda] \geqslant 0$$

由此即知：若 $\lambda < (2d - 1)^{-1}$，则 $\sigma_1 - \sigma_2 \geqslant 0$，再由 (3.4) 即

得 $\sigma_1 = 0$，从而过程遍历．故(3.1)获证．□

注． 对(3.3)取更多的集 A，并应用(1.2)可以改进定理 3 中 $\lambda_c^{(d)}$ 的下界估计．

4. 下面证明：

$$\lambda_c^{(d)} \leqslant \frac{2}{d}.$$

关键是证明 $d = 1$ 的情形．由于证明较长，为了易于理解，先介绍一下证明的想法和步骤．在第 4 目至第 9 目中，恒设 $S = Z$，不再一一申明．

主要想法是 $\forall \lambda \geqslant 2$，造出 $\mathscr{S}$ 上的一个函数 h 使之满足

(4.1) $$h(\phi) = 0;\ 0 < h(A) \leqslant 1,\ A \neq \phi;$$

(4.2) $$E_A h(A_t) \geqslant h(A),\ \forall A \in \mathscr{S},\ t \geqslant 0,$$

其中 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 是一维基本接触过程的对偶马链．事实上，如果找到了这样的 h，则

$$E_A h(A_t) = \sum_{B \neq \phi} p(t, A, B) h(B)$$

$$\leqslant \sum_{B \neq \phi} p(t, A, B) = P_A(A_t \neq \phi),$$

其中 $p(t, A, B)$ 是 A_t 的转移概率．在上式中令 $t \to \infty$ 即知当 $A \neq \phi$ 时，

$$\sigma(A) = \lim_{t \to \infty} P_A(A_t \neq \phi) \geqslant \varlimsup_{t \to \infty} E_A h(A_t) \geqslant h(A) > 0,$$

故由(1.1)及推论 2.6 知过程非遍历，因而 $\lambda_c^{(1)} \leqslant 2$．

于是问题归结为如何构造 h．首先注意(4.2)等价于

(4.3) $$\sum_{B \in \mathscr{S}} q(A, B) h(B) = \frac{d}{dt} E_A h(A_t)|_{t=0} \geqslant 0,\ \forall A \in \mathscr{S},$$

其中 $(q(A, B): A, B \in \mathscr{S})$ 是 $\{A_t: t \geqslant 0\}$ 的 Q-矩阵，即

(4.4)

$$q(A,\ B)=\begin{cases}1, & B=A\backslash u,\ u\in A,\\ \lambda[l_A(u-1)+l_A(u+1)], & B=A\cup v,\ u\in A,\ v\notin A,\\ 0, & \text{其它}\quad B\neq A.\end{cases}$$

事实上,若 (4.1) 成立,则

$$\frac{d}{dt}\ E_A h(A_t)$$

恒存在。于是由 (4.2) 即得

$$\frac{d}{dt}\ E_A h(A_t)|_{t=0}\geqslant 0.$$

反之若 (4.3) 成立,则由向前方程知

$$\frac{d}{dt}\ E_A h(A_t)=\sum_C p(t,A,C)\sum_B q(C,\ B)h(B)$$

$$=\sum_C p(t,A,\ C)\ \frac{d}{dt}\ E_C h(A_t)|_{t=0}\geqslant 0.$$

即 $E_A h(A_t)$ 是 t 的不降函数,因此

$$E_A h(A_t)\geqslant E_A h(A_0)=h(A),\ \forall t\geqslant 0.$$

将 (4.4) 代入 (4.3) 并移项即知 (4.3) (因而 (4.2)) 等价于

(4.5) $$\forall A\in\mathscr{S},\sum_{u\in A}[h(A)-h(A\backslash u)]$$

$$\leqslant\lambda\sum_{u\notin A}(l_A(u-1)+l_A(u+1))[h(A\cup u)-h(A)].$$

这样,问题就化为构造满足 (4.1),(4.5) 的函数 h。由于这样的 h 满足 $\sigma(A)\geqslant h(A)$。而由引理 1 的证明知

$$\sigma(A)=1-\hat{\nu}(A)=\bar{\nu}_1\left(\bigcup_{u\in A}\{\eta(u)=1\}\right),$$

所以自然想象 h 可以取下列形式:

(4.6) $$h(A)=\mu\left(\bigcup_{u\in A}\{\eta(u)=1\}\right),\ A\in\mathscr{S}$$

其中 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 是满足 $\mu(\{\theta\})=0$ 的一个适当的测度。在此取 μ 为与具有限期望的正分布列 $f=\{f(n):n\geqslant 1\}$ 对应的更新测度，即 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 由下式定义：若 $A=\{u_1,\cdots,u_n\}\in\mathscr{S}$，$u_1<u_2<\cdots<u_n$，则

(4.7) $\mu\{\eta:\eta(u_i)=1,\ 1\leqslant i\leqslant n;\ \eta(x)=0,\forall x\in[u_1,u_n]Z\setminus A\}$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}kf(k)\right)^{-1}\prod_{i=1}^{n}f(u_{i+1}-u_i),$$

即 η 中相邻的 1 之间的距离在 μ 之下独立同分布且以分布列 f 为共同分布（关于 μ 的存在性及其性质由引理 5 给出）。关于 f，我们要求如此造出的 h 使对一切 $\{1,2,\cdots,n\}=A$，(4.5) 中的等号成立。这样选择的理由是使 f 确定而且 h 具有可计算的特点。

以下通过一系列的引理来完成上述想法及步骤。在第 5 目至第 8 目中，恒设 $f\triangleq\{f(n):n=1,2,\cdots\}$ 为一具有限期望的正分布列，即 $f(n)>0$，$\forall n\geqslant 1$ 且

$$Ef\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}nf(n)<\infty.$$

注意此时

$$Ef>\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=1.$$

还有若令

$$F(n)\triangleq\sum_{k=n}^{\infty}f(k),\ n\geqslant 1,$$

则

(4.8) $$Ef=\sum_{n=1}^{\infty}F(n),\ f(n)=F(n)-F(n+1),$$

$$F(1)=1.$$

5. 引理 对任意给定的 $a\in(0,(Ef)^{-1}](c(0,1))$，及

$$\forall A=\{u_1,\cdots,u_n\}\in\mathscr{S},\ u_1<\cdots<u_n,$$

定义

(5.1) $$\nu(\{\eta:\eta(u)=1,\ \forall u\in A;\ \eta(v)=0,\ \forall v\in[\min A,\ \max A]Z\backslash A\})=a\sum_{k=1}^{n-1}f(u_{k+1}-u_k),$$

(约定当 $n=1$ 时,上式右边的乘积为 1), $\min A$, $\max A$ 分别表示 A 的元素的最小值及最大值,则 ν 决定 $X=\{0,1\}^Z$ 上的一个唯一的概率测度 μ (以后称为与 f 相应的更新测度),且

(5.2)

$$\left.\begin{cases}\mu\left(\bigcap_{k=0}^{n}\{\eta(u+k)=0\}\right)=1-a\sum_{k=1}^{n+1}F(k),\\ \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n}\{\eta(u+k)=0\}\cap\{\eta(u+n+1)=1\}\right)=aF(n+2),\end{cases}\right.\quad n\geqslant 0.$$

对任意的 $m,n,l\in Z_+$, 给定的 $\varepsilon_k\in\{0,1\}$, $1\leqslant k\leqslant n-1$(如果这样的 k 存在!)有

(5.3) $$\mu\left(\left\{\eta:\begin{array}{l}\eta(u-m+1)=\cdots=\eta(u-1)=0;\\ \eta(u)=\eta(u+n)=1;\ \eta(u+k)=\varepsilon_k,\\ 1\leqslant k\leqslant n-1;\ \eta(u+n+1)=\cdots\\ \qquad=\eta(u+n+l)=0\end{array}\right\}\right)$$

$$=F(m)\mu(\eta(u)=\eta(u+n)=1,\eta(u+k)=\varepsilon_k,\ 1\leqslant k\leqslant n-1)F(l+1).$$

(5.4) $$\mu(\eta(u)=0,u\leqslant l)=\mu(\eta(u)=0,\ u\geqslant k)=\mu(\{\theta\})=0\ \text{当且仅当}\ a=[Ef]^{-1}.$$

证. (i) 集类

(5.5) $$\mathfrak{A}_f\triangleq\{\xi\times X(Z\backslash\Lambda):\Lambda\in\mathscr{S},\ \xi\in X(\Lambda)\}\cup\{\phi,\ X\}$$

是 X 的一个半集代数 [2,(1982), § 1.3.1]. 在 $\mathfrak{A}_f$ 上可以如下地定义一个有限可加测度 μ, 它是 ν 的扩张: $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, 记 $[\min\Lambda,$

$\max\Lambda]Z\backslash\Lambda=\Lambda_1$，定义

$$(5.6)\quad \mu(\{\eta(u)=1;\ u\in\Lambda\})\triangleq\sum_{\Lambda_2\subset\Lambda_1}\nu\{\eta(u)=1,\ u\in\Lambda\cup\Lambda_2;\ \eta(v)=0,\ v\in\Lambda_1\backslash\Lambda_2\},$$

注意上式右边诸集两两不交，其并等于左边之集，而且左边的集表成形如(5.1)中的集的并且只有此种表示法。$\forall\xi\in X(\Lambda)$，令$\Lambda^0\triangleq\{u\in\Lambda:\xi(u)=0\}$，$\Lambda^1\triangleq\{u\in\Lambda:\xi(u)=1\}$，定义

$$(5.7)\begin{cases}\mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda))\Big(=\mu\Big(\bigcap_{u\in\Lambda^1}\{\eta(u)=1\}\Big)\cap\Big(\bigcap_{u\in\Lambda^0}\{\eta(u)=0\}\Big)\Big)\triangleq\sum_{\Lambda_2\subset\Lambda^0}(-1)^{|\Lambda_2|}\mu\Big(\bigcap_{u\in\Lambda^1\cup\Lambda_2}\{\eta(u)=1\}\Big),\\ \mu(X)\triangleq 1,\ \Big(\text{约定}\bigcap_{u\in\phi}\{\eta(u)=1\}=X\Big)\end{cases}$$

首先由 (5.6), (5.7) 知

$$\begin{aligned}&\mu\{\eta(u)=1,\ u\in\Lambda;\ \eta(v)=0,\ v\in\Lambda_1\}\\ &=\sum_{\Lambda_2\subset\Lambda_1}(-1)^{|\Lambda_2|}\cdot\mu\Big(\bigcap_{u\in\Lambda\cup\Lambda_2}\{\eta(u)=1\}\Big)\\ &\overset{(5.7)}{=}\sum_{\Lambda_2\subset\Lambda_1}(-1)^{|\Lambda_2|}\sum_{\Lambda_3\subset\Lambda_1\backslash\Lambda_2}\nu\left\{\eta:\begin{matrix}\eta(u)=1,\ u\in\Lambda\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3;\\ \eta(v)=0,\ v\in\Lambda_1\backslash(\Lambda_2\cup\Lambda_3)\end{matrix}\right\}\\ &=\sum_{\tilde\Lambda\subset\Lambda_1}\Big(\sum_{\Lambda_2\subset\tilde\Lambda}(-1)^{|\Lambda_2|}\Big)\nu\left\{\eta:\begin{matrix}\eta(u)=1,\ u\in\Lambda\cup\tilde\Lambda\\ \eta(v)=0,\ v\in\Lambda_1\backslash\tilde\Lambda\end{matrix}\right\},\\ &=\nu\{\eta(u)=1,\ u\in\Lambda;\ \eta(v)=0,\ v\in\Lambda_1\}\end{aligned}$$

其中最后一步用到恒等式

$$(5.8)\quad\sum_{\Lambda_2\subset\tilde\Lambda}(-1)^{|\Lambda_2|}=[1+(-1)]^{|\tilde\Lambda|}=\begin{cases}1, & \tilde\Lambda=\phi,\\ 0, & \tilde\Lambda\neq\phi.\end{cases}$$

故μ是ν的扩张。

再证：μ 在 $\mathfrak{A}_1$ 上可限可加，即证：$\forall \xi \in X(Z\backslash \Lambda)$，$\xi^{(i)} \times X(Z\backslash \Lambda_i)$，$i=1, 2, \cdots, m$ 两两不交，且

$$(5.9)\qquad \xi \times X(Z\backslash \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \xi^{(i)} \times X(Z\backslash \Lambda_i),$$

有

$$(5.10)\qquad \mu(\xi \times X(Z\backslash \Lambda)) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\xi^{(i)} \times X(Z\backslash \Lambda_i)).$$

要证 (5.10)，不难知道只需证：$\forall \Lambda \subset \tilde{\Lambda} \in \mathscr{S}$，有

$$(5.11)\qquad \mu(\xi \times X(Z\backslash \Lambda)) = \sum_{\zeta \in X(\tilde{\Lambda}\backslash \Lambda)} \mu(\xi \times \zeta \times X(Z\backslash \tilde{\Lambda})).$$

而要 (5.11)，只需证：$\forall v \in \Lambda$，有

$$(5.12)\qquad \mu(\xi \times X(Z\backslash \Lambda)) = \mu(\xi \times \{0\} \times X(Z\backslash(\Lambda \cup v)) + \mu(\xi \times \{1\} \times X(Z\backslash(\Lambda \cup v)).$$

(即 5.11) 中 $|\tilde{\Lambda}\backslash \Lambda| = 1$ 的情形)，今往证之：Λ^i，$i = 0, 1$ 仍如 (5.7) 前面所定义，则由 (5.7) 知 (5.12) 的右边等于

$$\sum_{\Lambda_2 \subset \Lambda^0 \cup v} (-1)^{|\Lambda_2|} \mu\{\eta(u) = 1,\ u \in \Lambda^1 \cup \Lambda_2\}$$

$$+ \sum_{\Lambda_2 \subset \Lambda} (-1)^{|\Lambda_2|} \mu\{\eta(u) = 1,\ u \in \Lambda^1 \cup v \cup \Lambda_2\}$$

$$- \sum_{\Lambda_2 \subset \Lambda^0} (-1)^{|\Lambda_2|} \mu\{\eta(u) = 1,\ u \in \Lambda^1 \cup \Lambda_2\}$$

$$+ \sum_{v \in \Lambda_2 \subset \Lambda^0 \cup v} (-1)^{|\Lambda_2|} \mu\{\eta(u) = 1,\ u \in \Lambda^1 \cup \Lambda_2\}$$

$$+ \sum_{\Lambda_2 \subset \Lambda^0} (-1)^{|\Lambda_2|} \mu\{\eta(u) = 1,\ u \in \Lambda^1 \cup v \cup \Lambda_2\}$$

$$\overset{(5.7)}{=} \mu(\xi \times X(Z\backslash \Lambda)).$$

因此 (5.12) 成立，故 μ 在 $\mathfrak{A}_1$ 上有限可加。

(ii) 在证明 μ 在 $\mathfrak{A}_t$ 上非负之前，先证 (5.2)，(5.3)。首先由 (5.7)，μ 是 ν 的扩张及 (5.1)，(4.8)

$$\mu\{\eta(u)=0\}=\mu(X)-\mu\{\eta(u)=1\}=1-a=1-aF(1).$$

$$\mu\{\eta(u)=0,\ \eta(u+1)=1\}=\mu\{\eta(u+1)=1\}-\mu\{\eta(u)=\eta(u+1)=1\}=a-af(1)=aF(2).$$

即 (5.2) 对 $n=0$ 成立，设 (5.2) 对 $n=k$ 成立，则

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k+1}\{\eta(u+i)=0\}\right)=\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k}\{\eta(u+i)=0\}\right)$$

$$-\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k}\{\eta(u+i)=0\}\cap\{\eta(u+k+1)=1\}\right)$$

$$=1-a\sum_{i=1}^{k+1}F(i)-aF(k+2)=1-a\sum_{i=1}^{k+2}F(i),$$

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k+1}\{\eta(u+i)=0\}\cap\{\eta(u+k+2)=1\}\right)$$

$$=\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k+1}\{\eta(u+i)=0\}\right)-\mu\left(\bigcap_{i=0}^{k+2}\{\eta(u)=0\}\right)$$

$$=\left[1-a\sum_{i=1}^{k+2}F(i)\right]-\left[1-a\sum_{i=1}^{k+3}F(i)\right]=aF(k+3).$$

即 (5.2) 对 $n=k+1$ 成立，由数学归纳法知 (5.2) 成立。

再证 (5.3)：设 $n\in Z_+$，给定 $\varepsilon_k\in\{0,1\}$，$1\leqslant k\leqslant n-1$（如果这样的 k 存在！）并暂记 $E\triangleq\{\eta:\eta(u)=\eta(u+n)=1,\ \eta(u+k)=\varepsilon_k,\ 1\leqslant k\leqslant n-1\}$。先用数学归纳法证明 (5.3) 中 $l=0$，$m\in Z_+$ 的情形。由 μ 是 ν 在 $\mathfrak{A}_t$ 上的有限可加扩张及 (5.1) 知

$$\mu(\{\eta(u-1)=0\}\cap E)=\mu(E)-\mu(\{\eta(u-1)=1\}\cap E)=\nu(E)-f(1)\nu(E)=F(2)\nu(E),$$

即 (5.3) 对 $l=0$, $m=0$ 成立. 设 (5.3) 对 $l=0$, $m=p$ 成立,则

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{\eta(u-p)=\cdots=\eta(u-1)=0\}\cap E)\\
&\quad=\mu(\{\eta(u-p+1)=\cdots=\eta(u-1)=0\}\cap E)\\
&\qquad-\mu(\{\eta(u-p)=1,\eta(u-p+1)=\cdots\\
&\quad=\eta(u-1)=0\}\cap E)=F(p)\nu(E)-f(p)\nu(E)\\
&\quad=F(p+1)\nu(E)
\end{aligned}
$$

即 (5.3) 对 $l=0$, $m=p+1$ 成立, 故 (5.3) 对 $l=0$ 及任何 $m\in Z_+$ 成立.

给定 m, 类似地用数学归纳法可证 (5.3) 对 m 及任何 $l\in Z_+$ 成立. 故 (5.3) 获证.

(iii) 再证 μ 在 $\mathfrak{A}_1$ 上非负. 首先注意当 $\Lambda=\{m,m+1,\cdots n\}$ 时,若 $\xi\neq\theta_\Lambda$, 则由 (5.3) 知

$$\mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda))>0,$$

若 $\xi=\theta_\Lambda$, 则由 (5.2) 知

$$\mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda))=1-a\sum_{k=1}^{n-m+1}F(k)$$

$$>1-a\sum_{k=1}^{\infty}F(k)=1-a[Ef]^{-1}\geqslant 0.$$

当 $\Lambda\neq\{m,m+1,\cdots,n\}$ 时, 由 μ 的有限可加性及上述注意知 (令 $\tilde\Lambda\triangleq[\min\Lambda,\max\Lambda]Z$)

$$\mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda))=\sum_{\zeta\in X(\tilde\Lambda\backslash\Lambda)}\mu(\xi\times\zeta\times X(Z\backslash\tilde\Lambda))>0.$$

故 μ 在 $\mathfrak{A}_1$ 上非负.

(iv) 最后完成引理的证明. 显然包含 $\mathfrak{A}_1$ 的最小集代数为 $\mathfrak{A}\triangleq\{A\times X(Z\backslash\Lambda):\ \Lambda\in\mathscr{S},\ A\subset X(\Lambda)\}$. 于是 μ 可以唯一地扩张成 $\mathfrak{A}$ 上的一个有限可加概率 [2,(1982), §1.3.1], 仍然记成

μ. 再由附录引理 3.5 知 μ 在 $\mathfrak{A}$ 上是 σ-可加的。故 μ 可唯一地扩张为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度。

还有由 (5.2) 知 $\forall l \in Z$

$$\mu\{\eta(u)=0, u \leqslant l\} = \lim_{k \to -\infty} \mu\{\eta(\mu)=0,\ k < u \leqslant l\}$$

$$= \lim_{k \to -\infty} \left(1 - a \sum_{m=1}^{l-k+1} F(m)\right) = 1 - a \cdot Ef,$$

同样由 (5.2) 有 $\mu\{\eta(u)=0,\ u \geqslant l\} = 1 - a \cdot Ef$，因为左边与 l 无关，令 $l \to -\infty$ 即得：$\forall l \in Z$.

$$\mu(\{\theta\}) = \mu\{\eta(u)=0,\ u \geqslant l\} = \mu\{\eta(u)=0,\ u \leqslant l\}$$
$$= 1 - a \cdot Ef.$$

故 (5.4) 成立。□

注. 当 $a > [Ef]^{-1}$ 时，用引理的证法可知由 (5.1) 可以决定一个有限符号测度.

6. 引理 设 $\lambda \geqslant 2$，$f \triangleq \{f(n): n \geqslant 1\}$ 为具有限期望的正分布，μ 为引理 5 中当 $a = [Ef]^{-1}$ 时所决定的概率测度，h 由 (4.6) 定义. 若 $\forall A = \{1, 2, \cdots, n\}$，(4.5) 中的等式都成立，则

$$(6.1) \qquad F(n+1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \cdot \frac{1}{(2\lambda)^n}, \quad n \geqslant 0.$$

若 $\lambda \in (0, 2)$，则不存在 f 使 $\forall \{1, 2, \cdots, n\}$，(4.5) 中的等式都成立。

证. $\forall A \in \mathscr{S}$，$u \in A$，由 (4.6) 知

$$(6.2) \qquad h(A) - h(A \backslash u) = \mu\{\eta(u)=1;\ \eta(v)=0,\ v \in A \backslash u\}$$

于是当 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时，由 (5.3) 及 (6.2) 知

$$\sum_{u \in A} [h(A) - h(A \backslash u)] = \sum_{k=1}^{n} F(k)(Ef)^{-1} F(n+1-k),$$

$$\sum_{u \in A} [I_A(u-1) + I_A(u+1)](h(A \cup u) - h(A))$$

$$= \mu\{\eta(n+1)=1,\ \eta(k)=0,\ k\in A\}$$
$$+ \mu\{\eta(0)=1,\ \eta(k)=0,\ k\in A\} = 2[Ef]^{-1}F(n+1)$$

故 $\forall A=\{1, 2, \cdots, n\}$，(4.5) 中的等式都成立等价于

$$(6.3)\quad \sum_{k=1}^{n} F(k)F(n+1-k) = 2\lambda F(n+1), F(1)=1, F(n)\searrow$$

由于 $F(n+1)$ 可由 λ, $F(1),\cdots$, $F(n)$ 表示，所以如果不管要求 $F(n)\searrow$，(6.3)有唯一解．为了将 (6.3) 明显解出，并证明引理的结论，引进母函数

$$(6.4)\qquad \varphi(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n.$$

以 x^{n+1} 乘 (6.3) 的等式然后对 $n\geqslant 1$ 求和 (注意 $F(1)=1$) 即得(在 $\varphi(x)$ 收敛的范围内)

$$\varphi^2(x) = 2\lambda(\varphi(x) - x),$$

解之，得

$$\varphi(x) = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda x},$$

因为由 (6.4) 知 $\varphi'(0) = F(1) = 1$，所以在上式中应取"—"号，故

$$(6.5)\qquad \varphi(x) = \lambda(1 - \sqrt{1 - 2x/\lambda}).$$

此函数在 $x < \frac{\lambda}{2}$ 解析，所以 (6.4) 的收敛半径是 $\frac{\lambda}{2}$，而且由单调收敛定理知

$$\lambda = \lim_{x\uparrow\lambda/2} \varphi(x) = \lim_{x\nearrow\lambda/2} \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n.$$

即 (6.4) 在 $x=\frac{\lambda}{2}$ 处收敛．于是当 $\lambda<2$ 时

$$Ef = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \infty,$$

此与假设矛盾，所以引理的最后一个结论获证。当 $\lambda \geqslant 2$ 时，则有 $\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \varphi(1) = \lambda(1-\sqrt{1-2/\lambda}) < \infty$ 此时将 (6.5) 展成幂级数

$$\varphi(x) = \lambda\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{-2x}{\lambda}\right)^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{(2\lambda)^{n-1}}x^n,$$

与 (6.4) 比较即得 (6.1)。最后由 (6.1) 知当 $\lambda > \frac{2n-1}{n+1}$ 时，$F(n)/F(n+1) > 1$，故当 $\lambda \geqslant 2$ 时，$F(n)$ 下降。□

7. 引理 设 f 是 Z_+ 上具有限期望的正分布列，μ 为引理 5 中 $a=[Ef]^{-1}$ 时定义的相应更新测度。$\forall n \geqslant 1$，$A \in \mathscr{B}(\{0,1\}^{Z_+})$，定义

(7.1) $\qquad \mu_n(A) \triangleq \mu(A \times X(Z\backslash Z_+)|\eta(-n)=1),$

若 $f(n)/f(n+1)$ 不升，则 $\mu_{n+1} \leqslant \mu_n$，$\forall n \geqslant 1$ 成立。

证. (i) 设 $k > l \geqslant 1$，f 是 $\mathscr{B}(X(Z[0,\infty)))$ 可测函数且对 μ_k 可积，则由 μ 的平移不变性易知

(7.2) $\quad \int_{X(Z[0,\infty))} f(\eta)\mu_k(d\eta) = \int_{X(Z[0,\infty))} f(\eta_{Z[l,\infty)})\mu_{k-l}(d\eta).$

而要想证明引理，由 §3 知只需证：对任何不降的 $\mathscr{B}(X(Z[0,\infty)))$ 可测函数，$\forall n \geqslant 1$，有

$$\int_{X(Z[0,\infty))} f(\eta)\mu_{n+1}(d\eta) \leqslant \int_{X(Z[0,\infty))} f(\eta)\mu_n(d\eta).$$

而由 (7.2) 及 §3 知只需证：

(7.3) $\qquad\qquad \mu_2 \leqslant \mu_1.$

由引理 5 可知 $\forall A \in \mathscr{B}(X(Z_+))$

$\mu(A \times X(Z\backslash Z_+)|\eta(-2)=\eta(-1)=1)$

$\quad = \mu(A \times X(Z\backslash Z_+)|\eta(-1)=1),$

于是由全概率公式即得

$$(7.4)\quad \mu_2(\cdot)=\mu_1(\cdot)\mu(\eta(-1)=1\mid\eta(-2)=1)$$
$$+\mu((\cdot)\times X(Z\backslash Z_+)\mid\eta(-2)=1,\eta(-1)=0)$$
$$\cdot\mu(\eta(-1)=0\mid\eta(-2)=1)$$

故若能证明

$$(7.5)\quad \mu((\cdot)\times X(Z\backslash Z_+)\mid\eta(-2)=1,\ \eta(-1)=0)\leqslant\mu_1(\cdot),$$

则由 (7.4) 即得 (7.3) (此处用到下述显然事实:

$\nu\leqslant\nu_i,\ \alpha_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ \alpha_1+\alpha_2=1\Rightarrow\nu\leqslant\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2$).

因此问题化为证明 (7.5)

(ii) 要证 (7.5), 由 § 3.6.4 (i) 知只需证: $\forall n\in Z_+$, $\Lambda\triangleq\{0,1,\cdots,n\}$

$$(7.6)\quad \mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda)\mid\eta(-2)=1,\ \eta(-1)=0)$$
$$\cdot\mu_1(\zeta\times X(Z_+\backslash\Lambda))$$
$$\leqslant\mu((\xi\wedge\zeta)\times X(Z\backslash\Lambda)\mid\eta(-2)=1,\ \eta(-1)=0)$$
$$\cdot\mu_1([\xi\vee\zeta]\times X(Z_+\backslash\Lambda)),\xi,\ \zeta\in X(\Lambda)$$

而为证 (7.6), 只需证:

$$(7.7)\quad\left\{\begin{aligned}&\mu(\xi\times X(Z\backslash\Lambda)\mid\eta(-2)=1,\eta(-1)=0)\\&\cdot\mu_1({}_u\zeta\times X(Z_+\backslash\Lambda))\\&\leqslant\mu({}_u\xi\times X(Z\backslash\Lambda)\mid\eta(-2)=1,\ \eta(-1)=0)\\&\cdot\mu_1(\zeta\times X(Z_+\backslash\Lambda)),\forall u\in\Lambda,\ \xi,\ \zeta\in X(\Lambda),\end{aligned}\right.$$
$$\xi\leqslant\zeta,\ \xi(u)=\zeta(u)=1.$$

事实上, (7.6) 与 (7.7) 等价. 这一点将留给读者作为习题.

(iii) 为证 (7.7), 先证 (7.7) 中的不等式 $\forall u\in\Lambda$, $\xi=\zeta$, $\zeta(u)=1$ 成立. 即 $\forall u\in\Lambda=\{0,1,\cdots,n\}$, $\zeta\in X(\Lambda)$, 有

$$(7.8)\quad \frac{\mu\{\eta(-2)=1,\eta(-1)=0;\eta(x)=\zeta(x),x\in\Lambda\backslash u;\ \eta(u)=0\}}{\mu\{\eta(-2)=1,\eta(-1)0=;\eta(x)=\zeta(x),x\in\Lambda\backslash u;\eta(u)=1\}}$$
$$\geqslant\frac{\mu\{\eta(-1)=1,\ \eta(x)=\zeta(x),\ x\in\Lambda\backslash u;\ \eta(u)=0\}}{\mu\{\eta(-1)=1;\ \eta(x)=\zeta(x),\ x\in\Lambda\backslash u;\ \eta(u)=1\}}.$$

记 $\{x\in \Lambda:\ \zeta(x)=1\}=\{x_1,\cdots,x_m\}$，$x_1<x_2<\cdots<x_m$，设 $u=x_k$，则 $k>0$ 且由引理5知

$$(7.8)\text{式的左边}=\begin{cases}\dfrac{F(n-x_{m-1}+1)}{f(x_m-x_{m-1})F(n-x_m+1)}, & k=m\\[2ex] \dfrac{f(x_{k+1}-x_{k-1})}{f(x_{k+1}-x_k)f(x_k-x_{k-1})}, & k<m,\ x_0\triangleq -2.\end{cases}$$

$$(7.8)\text{式的右边}=\begin{cases}\dfrac{F(n-x_{m-1}+1)}{f(x_m-x_{m-1})F(n-x_m+1)}, & k=m\\[2ex] \dfrac{f(x_{k+1}-x_{k-1})}{f(x_{k+1}-x_k)f(x_k-x_{k-1})}, & k<m,\ x_0\triangleq -1.\end{cases}$$

于是要证 (7.8)，只需证:

$$(7.9)\qquad \frac{F(n+3)}{f(x_1+2)F(n-x_1+1)}\geqslant\frac{F(n+2)}{f(x_1+1)F(n-x_1+1)},$$

$$\frac{f(x_2+2)}{f(x_2-x_1)f(x_1+2)}\geqslant\frac{f(x_2+1)}{f(x_2-x_1)f(x_1+1)}$$

由于 $f(n)/f(n+1)$ 不升，显然 (7.9) 的第二式成立。再令 $f(k)/f(k+1)=r_k$。则 $\forall k\geqslant n+2$，$r_k\leqslant r_{n+2}\leqslant r_{x_1+1}$，于是

$$F(n+2)=\sum_{k=n+2}^{\infty} r_k f(k+1)\leqslant r_{x_1+1}F(n+3)$$

$$=\frac{f(x_1+1)}{f(x_1+2)}F(n+3),$$

即 (7.9) 的第一式成立。故 (7.8) 式获证，即 (7.7) 中的不等式 $\forall u\in\Lambda$，$\xi=\zeta$，$\zeta(u)=1$ 成立。于是要证 (7.7)，只需证 (7.8) 的右边是 $\zeta(\in X(\Lambda\backslash u))$ 的不升函数。即令

$$a(\zeta)\triangleq\frac{\mu(\eta(-1)=1,\ \eta_{\Lambda\backslash u}=\zeta,\ \eta(u)=0)}{\mu(\eta(-1)=1,\ \eta_{\Lambda\backslash u}=\zeta,\ \eta(u)=1)},$$

$$u\in\Lambda,\ \zeta\in X(\Lambda\backslash u),$$

要证

$$(7.10)\qquad \forall v\in\Lambda\backslash u,\ \zeta(v)=0\Rightarrow a(\zeta)\geqslant a({}_v\zeta).$$

为此，令 $m \triangleq \max\{x \in \Lambda\backslash u;\ \zeta(x)=1\}$，则 m, u, v 两两不同，以下就 m, u, v 的六种大小关系分别讨论(7.10)的正确性。

(*a*) $m<v<u$，此时由 (5.3) 知

$$a(\zeta)=\frac{\mu(\eta(-1)=1,\cdots,\ \eta(m)=1)F(n-m+1)}{\mu(\eta(-1)=1,\cdots,\eta(m)=1)f(u-m)F(n-u+1)},$$

$$\begin{aligned}a({}_v\zeta)=&[\mu(\eta(-1)=1,\cdots,\ \eta(m)=1,\cdots,\ \eta(v)=1)\\&F(n-v+1)]/[\mu(\eta(-1)=1,\cdots,\eta(m)=1,\cdots,\\&\eta(v)=1)f(u-v)F(n-u+1)],\end{aligned}$$

于是(7.10)中的不等式化为

$$\frac{f(u-v)}{f(u-m)}\geqslant\frac{F(n-v+1)}{F(n-m+1)}.$$

而此不等式可由 $f(n)/f(n+1)$ 不升并仿 (7.9) 的第二个不等式的证法证明之(注意 $u\leqslant n$)。

(*b*) $m<u<v$ 此时由 (5.3) 仿 (*a*) 的证法知 (7.10) 中的不等式化为

$$f(v-u)/f(v-m)\geqslant F(n-u+1)/F(n+m+1).$$

于是再由 $f(n)/f(n+1)$ 的不升性可知其成立。

(*c*) $v<m<u$，$u<m<v$。对于这两种情形，应用(5.3)可证 $a(\zeta)=a({}_v\zeta)$。

(*d*) $v<u<m$。此时需分两种情形加以讨论：

如果 $\exists x\in(v,\ u)Z$ 使 $\zeta(x)=1$，则由 (5.3) 可证

$$a(\zeta)=\frac{\mu(\eta(x)=1,\cdots,\eta(u)=0,\cdots,\ \eta(m)=1)}{\mu(\eta(x)=1\cdots,\ \eta(u)=0,\cdots,\ \eta(m)=1)}=a({}_v\zeta)$$

若 $\forall x\in(v,\ u)Z$，$\zeta(x)=0$，则令

$$l\triangleq\min\{y<v:\zeta(y)=1\},\ k=\max\{y>u;\zeta(y)=1\},$$

应用 (5.3) 可证

$$a(\zeta)=\frac{f(k-j)}{f(u-j)f(k-u)},\quad a(.\zeta)=\frac{f(k-v)}{f(k-u)f(u-v)},$$

再由 $f(n)/f(n+1)$ 不升即知 $a(\zeta)\geqslant a(.\zeta)$.

(e) $u<v<m$. 此时也可分成 $\exists x\in(u,v)Z$ 使 $\zeta(x)=1$, 及 $\forall x\in(u,v)Z$ 使 $\zeta(x)=0$ 两种情形,仿 (d) 证明

$$a(\zeta)\geqslant a(.\zeta).$$

总结以上讨论即知引理的结论成立. □

8. 引理 设 $\lambda\geqslant 2$, f 是 $\{1,2,\cdots\}$ 上具有限期望的正分布且 F 由 (6.1) 给出, h 及 μ 分别是由 (4.6) 及引理 5$(a=(Ef)^{-1})$ 定义的 $\mathscr{S}$ 上的函数与更新测度. 则 (4.5) 成立.

证. (i) 给定 $A\in\mathscr{S}$, 记 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i$, $A_i=[l_i+1, r_i-1]\cap Z$, $r_i\leqslant l_{i+1}<r_{i+1}-1$, $i=1,2,\cdots,k$, 令

(8.1) $R(u)\triangleq\mu\{\eta\in X:\eta(x)=0,\ \forall x\in A(u,\infty)\mid\eta(u)=1\}$,

(8.2) $L(u)\triangleq\mu\{\eta\in X:\eta(x)=0,\ \forall x\in A(-\infty,u)\mid\eta(u)=1\}$,

则由 (6.2) 及 (5.3) 知 $\forall u\in A$,

$$h(A)-h(A\backslash u)=L(u)R(u)\mu\{\eta(u)=1\}.$$

于是 (4.5) 可写成

(8.3) $$\forall A\in\mathscr{S},\ \sum_{u\in A}L(u)\ R(u)\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{k}[L(l_i)R(l_i)+L(r_i)R(r_i)]$$

因此要证引理,就是要证明 (8.3).

(ii) 不等式 (8.3) 的特点是它将 R,L 在 A 上的值与在 A^c 上的值联系起来. 因此下面先导出一些有关的恒等式. 注意 $\forall\eta\in X$, $\eta(x)=0$, $\forall x\in A\cap(u,\infty)$ 当且仅当 $\exists y\in(u,\infty)Z$ 使 $\eta(y)=1$ (因而 $y\in A^c\triangleq Z\backslash A$) 且 $\eta(x)=0$, $\forall x\in[A\cap(y,\infty)]\cup(u,y)Z$, 于是

$$\{\eta:\eta(u)=1,\ \eta(x)=0,\ \forall x\in A\cap(u,\ \infty)\}$$

$$=\bigcup_{\substack{y\geq u\\ y\in A^c}}\{\eta:\eta(u)=\eta(y)=1;\ \eta(x)=0,$$

$$\forall x\in[A\cap(y,\infty)]\cup(u,y)Z\}$$

而右边各集两两不交,故由 μ 的可加性及 (5.3)

$$(8.4)\quad R(u)=[\mu\{\eta(u)=1\}]^{-1}\sum_{y>u,y\in A^c}f(y-u)\mu\{\eta(y)$$

$$=1;\ \eta(x)=0,\ \forall x\in A\cap(y,\ \infty)\}$$

$$=\sum_{y>u,y\in A^c}R(y)f(y-u).$$

又由 (6.3) 知

$$(8.5)\ 2\lambda f(n)=2\lambda[F(n)-F(n+1)]=\sum_{k=1}^{n-1}F(k)F(n-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}F(k)F(n+1-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}F(k)f(n-k)-F(n),\ n\geqslant 2.$$

于是由 (8.4) (令 $u=l_i$), (8.5) 知

$$(8.6)\quad 2\lambda R(l_i)=\sum_{y>l_i,y\in A^c}R(y)2\lambda f(y-l_i)=\sum_{y>l_i,y\in A^c}R(y)$$

$$\cdot\Big[\sum_{y>z>l_i}f(y-z)F(z-l_i)-F(y-l_i)\Big].$$

再由 (8.4) 知

$$(8.7)\ \sum_{y>l_i,y\in A^c}R(y)F(y-l_i)$$

$$=\sum_{y>l_i,y\in A^c}\ \sum_{z>y,z\in A^c}R(z)f(z-y)F(y-l_i)$$

$$- \sum_{y>z>l_i,\, y,\, z\in A^c} R(y)f(y-z)F(z-l_i).$$

将 (8.7) 代入 (8.6) 并应用 (8.4) 即得

$$(8.8) \qquad 2\lambda R(l_i) = \sum_{\substack{y>z>l_i\\ y\in A^c,\, z\in A}} R(y)f(y-z)F(z-l_i)$$

$$= \sum_{z>l_i,\, z\in A} R(z)F(z-l_i).$$

同法可得

$$(8.9) \qquad 2\lambda L(r_i) = \sum_{z<l_i,\, z\in A} F(r_i-z)L(z).$$

(iii) 为证 (8.3)，首先由 (8.8)、(8.9) 知 (8.3) 的右边等于

$$(8.10) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\Big[L(l_i)\sum_{z>l_i,\, z\in A} R(z)F(z-l_i) + R(r_i)$$

$$\cdot \sum_{z<l_i,\, z\in A} F(r_i-z)\ L(z)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\Big[\ L(l_i)\sum_{j=i}^{k}\ \sum_{z=l_j+1}^{r_j-1} R(z)F(z-l_i)$$

$$+ R(r_i)\sum_{j=1}^{i}\ \sum_{z=l_j+1}^{r_j-1} F(r_i-z)\ L(z)\Big]$$

由 (8.4) 并注意类似于 (8.4) 可证

$$L(u) = \sum_{z<u,\, z\in A^c} f(u-z)L(z),$$

及

$$z \leqslant l_1 \Rightarrow L(z) = 1;\ \ z \geqslant r_k \Rightarrow R(z) = 1$$

知 (8.3) 的左边等于

$$(8.11) \qquad \frac{1}{2}\sum_{u\in A}\Big[L(u)\sum_{z>u,\, z\in A^c} R(z)f(z-u) + R(u)$$

$$\cdot \sum_{z<u,\, z\in A^c} f(u-z)L(z)\ \Big] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\ \sum_{u=l_j+1}^{r_j-1} L(u)$$

$$\cdot\left[\sum_{i=j}^{k-1}\sum_{z=r_i}^{l_{i+}} R(z)f(z-u)+\sum_{z=r_k}^{\infty} f(z-u)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{u=l_i+}^{r_j-1} R(u)\left[\sum_{i=?}^{j}\sum_{z=r_{j-1}}^{l_i} f(u-z)L(z)\right.$$

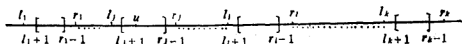
$$\left.+\sum_{z=-\infty}^{l_1} f(u-z)\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i}^{k}\sum_{z=l_i+1}^{r_j-1}$$

$$\cdot\sum_{u=r_{j-1}}^{l_j} R(z)f(z-u)L(u)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{z=l_i+1}^{r_j-1} R(z)$$

$$\cdot F(z-l_1)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{z=l_j+1}^{r_j-1}\sum_{u=r_i}^{l_{i+}} R(u)f(u$$

$$-z)L(z)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{z=l_i+1}^{r_j-1} F(r_k-z)L(z)$$

在 (8.10)，(8.11) 的推导中，下列图象是有帮助的



逐项考查 (8.10)，(8.11) 的右边各项，可以看出 (8.10) 右边第一个和式中与 $i=1$ 对应的项为

$$L(l_1)\sum_{j=1}^{k}\sum_{z=l_j+1}^{r_j+1} R(z)F(z-l_1)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{z=l_j+1}^{r_j-1} R(z)F(z-l_1),$$

即为 (8.11) 右边的第二个和式；同样 (8.10) 右边第二个和式中与 $i=k$ 对应的项等于 (8.11) 右边第四个和式。于是比较 (8.10)，(8.11) 的右边可以看出：若能证明

$$\sum_{u=r_{i-1}}^{l_i} f(z-u)L(u) \leqslant F(z-l_i)L(l_i),$$

$$j \geqslant i \geqslant 2,\ l_j < z < r_j,$$

$$\sum_{u=r_i}^{l_{i+1}} R(u)f(u-z) \leqslant R(r_i)F(r_i-z),$$

$$1 \leqslant j \leqslant i \leqslant k-1,\ l_j < z < r_j,$$

则 (8.3) 获证. 而要证上两式,易见只需证:

(8.12) $\quad L(u) \leqslant L(l_i)$, 当 $r_{i-1} \leqslant u \leqslant l_i$.

(8.13) $\quad R(u) \leqslant R(r_i)$, 当 $r_i \leqslant u \leqslant l_{i+1}$.

(iv) 今应用引理7往证 (8.12) 及 (8.13). 为此先验证 $f(n)/f(n+1)$ 不升,事实上,由 (6.1) 知

$$F(k)-F(k+1)=\frac{2(2k-2)!}{(k-1)!(k+1)!(2\lambda)^k}\cdot[(k+1)\lambda-(2k+1)],$$

于是

$$(8.14)\quad \frac{f(n)}{f(n+1)}\cdot\frac{f(n+2)}{f(n+1)}$$

$$=\frac{[F(n)-F(n+1)][F(n+2)-F(n+3)]}{[F(n+1)-F(n+2)]^2}$$

$$=\frac{(2n+1)(n+2)}{(2n-1)(n+3)}\times\frac{[(n+1)\lambda-(2n-1)][(n+3)\lambda-(2n+3)]}{[(n+2)\lambda-(2n+1)]^2}$$

记右边含 λ 的有理式为 $g(\lambda)$, 若能证明: 当 $\lambda>2$ 时, $g(\lambda)$ 为 λ 的上升函数,则由 (8.14) 知 ($g(2)=1$)

$$\frac{f(n)}{f(n+1)}\cdot\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\geqslant\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+5n-3}\ g(2)>1,$$

因而 $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ 下降．但经过计算

$$g'(\lambda)=\frac{6[(n+1)\lambda+1]}{[(n+2)\lambda-(2n+1)]^3}>0,\ \forall\lambda\geqslant 2,$$

从而 $g(\lambda)$ 为 $\lambda(\geqslant 2)$ 的上升函数．

往证 (8.13)：当 $u\in[r_i,\ l_{i+1}]$ 时，

$$A\cap(u,\infty)=\bigcup_{j=i+1}^{k}[l_j+1,\ r_j-1],$$

于是由 $R(u)$ 的定义及 μ 的平移不变性知

$$(8.15)\quad R(u)=\mu(\eta(x)=0,\ \forall x\in\bigcup_{j=i+1}^{k}[l_j-l_{i+1},r_j-l_{i+1}-2]\mid\eta(u-(l_{i+1}+1))=1)$$

$$=\mu_{(l_{i+1}+1-u)}\left\{\eta(x)=0,\ \forall x\in\bigcup_{j=i+1}^{k}[l_j-l_{i+1},r_j-l_{i+1}-2]\right\}$$

由引理 7 知 $\mu_{(l_{i+1}+1-u)}\geqslant\mu_{(l_{i+1}+1-r_i)}$．而

$$f(\eta)\triangleq 1-I_{\{\zeta(x)=0,\forall x\in A\}}(\eta)=1-\prod_{x\in A}(1-\eta(x)),$$

$$\eta\in\{0,\ 1\}^{Z_+},\ A\subset Z_+$$

为 $\{0,1\}^{Z_+}$ 上的不降函数．故由 (8.15) 知 (8.13) 成立．

至于 (8.12) 的证明可如下进行：首先注意，由引理 5 知

$$\mu\{\eta(u)=1;\ \eta(x)=0,\ \forall x\in A\cap(-\infty,u)\}$$

$$=\mu\{\eta(-u)=1;\ \eta(x)=0,\ \forall x\in(-A)\cap(-u,\infty)\}$$

其中 $-A=\{-u\in Z:u\in A\}$．于是由 $L(u)$ 的定义及(8.13)的证法知，当 $u\in[r_{i-1},\ l_i]$时，

$$L(u)=\mu(\eta(x)=0,\ \forall x\in(-A)\cap(-u,\infty)\mid\eta(-u)=1)$$

$$=\mu_{(u+1-r_{i-1})}\left\{\eta(x)=0,\ \forall x\in\bigcup_{j=1}^{i}[r_i-r_j,r_i-l_j-2]\right\}$$

由此应用引理 7 即可得知 (8.12) 成立。□

9. 定理. (i) 一维基本接触过程的临界值

(9.1) $$\lambda_c^{(1)} \leqslant 2$$

(ii) 对 $\lambda \geqslant 2$, $A \in \mathscr{S}$,

(9.2) $$\begin{aligned}\sigma(A) &= \bar{\nu}_1^{\lambda}\{\eta: \exists u \in A \text{ 使 } \eta(u)=1\}\\ &\geqslant \mu\{\eta: \exists u \in A \text{ 使 } \eta(u)=1\},\end{aligned}$$

其中 μ 为引理 5 中 $a=(Ef)^{-1}$(f 由 (6.1) 给出) 决定的概率测度.

(iii) 对 $\lambda \geqslant 2, \rho(\lambda) \triangleq \sigma(\{u\}) \geqslant \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2\lambda}}$.

证. 由引理 8, 6 及第 4 目的讨论知

$$\sigma(A) \geqslant h(A)=\mu\{\eta: \eta(u)=1, \text{ 对某一 } u \in A\}$$

成立. 再由定理 3.3.6 的证明及定理 3.3.4 知

$$\begin{aligned}\lambda_c &= \sup\{\lambda \geqslant 0: \text{与 } c_1(u, \eta) \text{ 相应的过程遍历}\}\\ &= \sup\{\lambda \geqslant 0: \sigma(\{u\})=0\}.\end{aligned}$$

但由 (9.2) 知当 $\lambda \geqslant 2$ 时, $\sigma(\{u\}) \geqslant \mu\{\eta(u)=1\}>0$, 故(9.1) 成立.

又由 (6.4), (6.5) 知当 $\lambda \geqslant 2$ 时,

$$[Ef]^{-1}=\left[\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\right]^{-1}=\varphi^{-1}(1)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2\lambda}}.$$

于是由 (9.2) 及引理 5 知

$$\begin{aligned}\sigma(\{u\}) &\geqslant \mu\{\eta(u)=1\}=a=[Ef]^{-1}\\ &=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2\lambda}}. \ \square\end{aligned}$$

下面我们证明

10. 定理 对任何 $d \geqslant 1$, 有

(10.1) $$d\lambda_c^{(d)} \leqslant \lambda_c^{(1)},$$

因而

(10.2) $$\lambda_c^{(d)} \leqslant \frac{2}{d}.$$

证. (i) 给定 $\lambda > 0$,记具参数 $d\lambda$ 的一维基本接触过程与具参数 λ 的 d 维基本接触过程的 Ω, $S(t)$, 它的对偶马链分别为 $\Omega^{(1,d\lambda)}$, $S^{(1,d\lambda)}(t)$, $A^{(1,d\lambda)}(t)$ 及 $\Omega^{(d,\lambda)}$ $S^{(d,\lambda)}(t)$, $A^{(d,\lambda)}(t)$. 于是要证(10.1),只需证:

(10.3) $P_{\{0\}}(A^{(d,\lambda)}(t)=\phi) \leqslant P_{\{0\}}(A^{(1,d\lambda)}(t)=\phi)$, $\forall t \geqslant 0$.

事实上,若 (10.3) 成立, 令 $t \to \infty$, 则由推论 2.6 知当 $d\lambda > \lambda_c^{(1)}$ 时,

$$\lim_{t\to\infty} P_{\{0\}}(A^{(d,\lambda)}(t)=\phi) < 1,$$

于是再由推论 2.6 知此时具参数 λ 的 d-维基本接触过程非遍历,故 (10.1) 成立,因而由定理 9 知 (10.2) 成立.

(ii) 为了证明(10.3),我们先做一些准备工作,首先注意由註 1.9 知基本接触过程是自对偶的, 因此我们引进记号 $X^{(d)} \triangleq \{0,1\}^{Z^d}$, $X_0^{(d)} \triangleq \{\eta \in X^{(d)}: \sum\eta(u) < \infty\}$ 定义 Z^d 到 Z 上的映射 π_d 如下:

(10.4) $\pi_d(x) \triangleq x_1 + \cdots + x_d$, $\forall x=(x_1,\cdots,x_d)\in Z^d$.

π_d 诱导出 $X_0^{(d)}$ 到 $X_0^{(1)}$ 上的映射 (仍记为 π_d) 如下:

(10.5) $\pi_d(\eta) \triangleq \{I_{\{\pi_d(u):\eta(u)=1,u\in Z^d\}}(v): v\in Z\}$, $\forall \eta \in X_0^{(d)}$.

设 ϕ 为 $X_0^{(1)}$ 上的函数,定义

(10.6) $H: (H\phi)(\eta) \triangleq \phi(\pi_d(\eta))$, $\eta \in X_0^{(d)}$,

则H为 $X_0^{(1)}$ 上的函数类到 $X_0^{(d)}$ 上的函数类的一个映射, 且有界函数的象仍然有界,不降函数(即若 $\eta \leqslant \xi$, 则 $\phi(\eta) \leqslant \phi(\xi)$)的象仍然不降,还有

(10.7) $|\phi(\xi)| \leqslant c|\xi|$, $\xi \in X_0^{(1)} \Rightarrow |H\phi(\eta)| \leqslant c|\eta|$, $\eta \in X_0^{(d)}$,

事实上, $|\pi_d(\eta)| \leqslant |\eta|$, 因而

$$|H\phi(\eta)| = |\phi(\pi_d(\eta))| \leqslant c|\pi_d(\eta)| \leqslant c|\eta|.$$

(iii) 设ϕ是 $X_0^{(1)}$ 上的有界不降函数,今往证:

(10.8) $(\Omega^{(d,\lambda)}H\phi)(\eta) \geqslant (H\Omega^{(1,d\lambda)}\phi)(\eta), \forall \eta \in X_0^{(d)}$.

固定 $\eta \in X_0^{(d)}$, 由 (10.6) 知

(10.9) $$H\Omega^{(1,d\lambda)}\phi(\eta) = \Omega^{(1,d\lambda)}\phi(\pi_d(\eta))$$
$$= \sum_{\pi_d(\eta)(v)=1} [\phi({}_v(\pi_d(\eta))) - \phi(\pi_d(\eta))]$$
$$+ d\lambda \sum_{\pi_d(\eta)(v)=0} [\pi_d(\eta)(v-1) + \pi_d(\eta)(v+1)][\phi({}_v(\pi_d(\eta))) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

(10.10) $$\Omega^{(d,\lambda)}H\phi(\eta)$$
$$= \sum_{\eta(u)=1} [\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$
$$+ \lambda \sum_{\eta(u)=0} \sum_{|w-u|=1} \eta(w)[\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

令 $A_v \triangleq \{u\in Z^d:\eta(u)=1,\ \pi_d(u)=v\}$, $B_v \triangleq \{u\in Z^d:\eta(u)=0,\ \pi_d(u)=v\}$, 则 A_v, $v\in Z$, 两两不交; B_v, $v\in Z$, 也两两不交,

(10.11) $$\{u\in Z^d:\ \eta(u)=1\} = \bigcup_{v\in Z} A_v,$$
$$\{u\in Z^d:\ \eta(u)=0\} = \bigcup_{v\in Z} B_v.$$

且由 (10.5) 知

(10.12) $$\pi_d(\eta)(v) = 1 \Longleftrightarrow A_v \neq \phi,$$

(10.13) $\pi_d(\eta)(v) = 0 \Rightarrow$ "$\forall u\in Z^d$, $\pi_d(u) = v \Rightarrow \eta(u) = 0$",

因而 $B_v \neq \phi$,

(10.14) $$\pi_d({}_u\eta) = \begin{cases} I_{\{\pi_d(w):\eta(w)=1,w\in Z^d\}\setminus v} = {}_v(\pi_d(\eta)), & u\in A_v,\ |A_v| = 1; \\ I_{\{\pi_d(w):\eta(w)=1,w\in Z^d\setminus u\}} = \pi_d(\eta), & u\in A_v,\ |A_v| > 1; \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} I_{\{\pi_d(w):\eta(w)=1, w\in Z^d\}\cup\{\pi_d(u)\}} = {}_v(\pi_d(\eta)), & u\in B_v, \\ & \pi_d(\eta)(v)=0, \\ I_{\{\pi_d(w):\eta(w)=1, w\in Z^d\}\cup\{\pi_d(u)\}} = \pi_d(\eta), & u\in B_v, \\ & \pi_d(\eta)(v)=1. \end{cases}$$

$$(10.15) \qquad {}_v(\pi_d(\eta))\begin{cases} \leqslant \pi_d(\eta), & \pi_d(\eta)(v)=1, \\ \geqslant \pi_d(\eta), & \pi_d(\eta)(v)=0. \end{cases}$$

于是由 ϕ 不降性及 (10.11),(10.12),(10.14),(10.15) 知

$$(10.16) \qquad \sum_{\eta(u)=1} [\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

$$= \sum_{A_v\neq\phi}\sum_{u\in A_v} [\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

$$= \sum_{v:|A_v|=1} [\phi({}_v(\pi_d(\eta))) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

$$\geqslant \sum_{\pi_d(\eta)(v)=1} [\phi({}_v(\pi_d(\eta))) - \phi(\pi_d(\eta))].$$

由 (10.11), (10.15), ϕ 的不降性及 (10.14) 知

$$(10.17) \qquad \sum_{\eta(u)\neq 0}\sum_{|w-u|=1} \eta(w)[\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

$$= \sum_{B_v=\phi}\sum_{u\in B_v}\sum_{|w-u|=} \eta(w)[\phi(\pi_d({}_u\eta)) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

$$\geqslant \sum_{\pi_d(\eta)(v)=0}\sum_{u\in B_v}\sum_{|w-v|=1} \eta(w)$$

$$\cdot [\phi({}_v(\pi_d(\eta))) - \phi(\pi_d(\eta))]$$

于是由 (10.9), (10.10), (10.16), (10.17) 知要证 (10.8), 只需证: 当 $\pi_d(\eta)(v)=0$ 时,有

$$(10.18) \qquad \sum_{u\in B_v}\sum_{k=1}^{d} \eta(u-e_k) \geqslant d\pi_d(\eta)(v-1),$$

$$\sum_{u\in B_v}\sum_{k=1}^{d}\eta(u+e_k)\geqslant d\pi_d(\eta)(v+1),$$

其中 e_k, $k=1,2,\cdots,d$ 是 Z^d 的 k 个正单位坐标向量.

实际上，若 $\pi_d(\eta)(v-1)=0$，则 (10.18) 的第一个不等式自然成立；若 $\pi_d(\eta)(v-1)=1$，则 $v-1\in\{\pi_d(x):\eta(x)=1, x\in Z^d\}$，即 $\exists x\in Z^d$ 使 $v-1=\pi_d(x)$，$\eta(x)=1$. 于是 $v=\pi_d(x+e_l)$，$l=1,\cdots,d$. 再由 (10.13) 及 $\pi_d(\eta)(v)=0$ 知 $\eta(x+e_l)=0$，$\forall l\in\{1,2,\cdots,d\}$，因而 $x+e_l\in B_v$，$l=1,2,\cdots,d$. 于是

$$\sum_{u\in B_v}\sum_{k=1}^{d}\eta(u-e_k)$$

$$\geqslant\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\eta(x+e_l-e_k)\geqslant d\eta(x)=d.$$

故 (10.18) 的第一个不等式成立. 类似地可证 (10.18) 的第二个不等式成立. 因此(10.8)成立.

(iv) 记与 $S^{(d,\lambda)}(t)$, $S^{(1,d\lambda)}(t)$ 相应的转移函数为 $p^{(d,\lambda)}(t,\eta,A)$, $p^{(1,d\lambda)}(t,\eta^1,A^1)$. 由注 1.9 知 $\forall\eta\in X^{(d)}$, $p^{(d,\lambda)}(t,\eta,X_0^{(d)})=1$ 及基本接触过程是自对偶的，于是将 $A^{(d,\lambda)}(t)$ 与 $\eta_t\triangleq I_{A^{(d,\lambda)}(t)}$ 等同，则 $p^{(d,\lambda)}(t,\eta,A)$, $t\geqslant 0$, $\eta\in X_0^{(d)}$, $A\subset X_0^{(d)}$ 是 $\eta_t=I_{A^{(d,\lambda)}(t)}$ 的转移概率. 再由 $E_A^{(d,\lambda)}|A^{(d,\lambda)}(t)|\leqslant e^{wt}|A|<\infty$ 知可将 $S^{(d,\lambda)}(t)$ 扩张到 $X_0^{(d)}$ 上满足 $|\phi(\eta)|\leqslant c(1+|\eta|)$, $\eta\in X_0^{(d)}$ 的函数 ϕ，仍记为 $S^{(d,\lambda)}(t)$，办法如下：

$$(10.19)\qquad S^{(d,\lambda)}(t)\phi(\eta)=\int_{X_0^{(d)}}p^{(d,\lambda)}(t,\eta,d\zeta)\phi(\zeta),$$
$$t\geqslant 0,\ \eta\in X_0^{(d)}.$$

同样 $p^{(1,d\lambda)}(t,\eta,A)$, $\eta\in X_0^{(1)}$, $A\subset X_0^{(1)}$ 也是 $\eta_t\triangleq I_{A^{(1,d\lambda)}(t)}$ 的转移概率，类似地对 $X_0^{(1)}$ 上的有界函数，如 (10.19) 可定义

$S^{(1,d\lambda)}(t)\phi$.

为了证明 (10.3)，只需证. 设 ϕ 为 $X_0^{(1)}$ 上的任一有界不降函数，则

(10.20) $\qquad S^{(d,\lambda)}(t)H\phi \geqslant HS^{(1,d\lambda)}(t)\phi, \ t \geqslant 0.$

事实上，若 (10.20) 获证，取 $\phi(\eta) \triangleq 1 - \chi_B(\eta)$，$B \in \mathscr{S}^{(1)}$，$\eta \in X_0^{(1)}$，则 ϕ 是 $X_0^{(1)}$ 上的不降函数. 再令 $\eta = I_{\{0\}} \in X_0^{(1)}$，则由 (10.20)

$$1 - p^{(d,\lambda)}\left(t, I_{\{0\}}, \bigcap_{u \in B} \{\zeta \in X_0^{(d)}: \pi_d(\zeta)(u) = 0\}\right)$$

$$\geqslant 1 - p^{(1,d\lambda)}\left(t, I_{\{0\}}, \bigcap_{u \in B} \{\zeta \in X_0^{(1)}: \zeta(u) = 0\}\right)$$

令 $B \uparrow Z$，即得 (10.3).

为证 (10.20)，只需证：若 ϕ 为 $X_0^{(1)}$ 上的有界不降函数，则

(10.21) $\quad S^{(d,\lambda)}(t)H\phi - HS^{(1,d\lambda)}(t)\phi$

$$= -\int_0^t \frac{d}{ds} S^{(d,\lambda)}(t-s)HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi]ds$$

$$= \int_0^t S^{(d,\lambda)}(t-s)[\Omega^{(d,\lambda)}H - H\Omega^{(1,d\lambda)}]S^{(1,d\lambda)}(s)\phi ds.$$

且 $S^{(1,d\lambda)}(s)\phi$ 有界不降，事实上若此事获证，则由(10.8)知(10.21)的右边非负，因而(10.20)获证.

首先注意由于基本接触过程是吸引模型，所以由定理 3.3.3 的证明知：$\forall \eta, \xi \in X_0^{(1)}$，$\eta \leqslant \xi$，有 $p^{(1,d\lambda)}(t, \eta, \cdot) \leqslant p^{(1,d\lambda)}(t, \xi, \cdot)$，由命题 3.2.8 即知 $S^{(1,d\lambda)}(s)\phi$ 是有界不降函数，于是剩下就是要证明：

(10.22) $\quad \frac{d}{ds}[S^{(d,\lambda)}(t-s)HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi]$

$$= S^{(d,\lambda)}(t-s)[\Omega^{(d,\lambda)}H - H\Omega^{(1,d\lambda)}]S^{(1,d\lambda)}(s)\phi.$$

为此首先证明下列二式：

(10.23) $|\phi(\xi)| \leqslant c|\xi|, \ \forall \xi \in X_0^{(1)}$

$$\Rightarrow |H\phi(\eta)| \leqslant c|\eta|, \ \forall \eta \in X_0^{(d)},$$

(10.24) $|(\Omega^{(d,\lambda)}f)(\eta)| \leqslant 2|\eta| \cdot \|f\|_\infty(1 + 2\lambda d), \ \forall \eta \in X_0^{(d)},$

其中 f 是 $X_0^{(d)}$ 上的任一有界函数,

$$\|f\|_\infty \triangleq \sup\{|f(\eta)| : \eta \in X_0^{(d)}\}.$$

事实上,由 (10.6) 知

$$|H\phi(\eta)| = |\phi(\pi_d(\eta))| \leqslant c|\pi_d(\eta)| \leqslant c|\eta|,$$

故 (10.23) 成立. 而

$$|(\Omega^{(d,\lambda)}f)(\eta)| = \Big|\sum_{\eta(u)=1}(f({}_u\eta) - f(\eta))$$

$$+ \lambda \sum_{\eta(u)=0} \sum_{|v-u|=1} \eta(v)[f({}_u\eta) - f(\eta)]\Big|$$

$$\leqslant 2|\eta| \cdot \|f\|_\infty + 2\lambda\|f\|_\infty \sum_{\eta(u)=0} \sum_{|v-u|=1} \eta(v)$$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty[|\eta| + \lambda \sum_{v \in Z^d} \sum_{|u-v|=1} \eta(v)]$$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty|\eta|(1 + 2\lambda d),$$

即 (10.24) 成立.

设 $c \triangleq \|\phi\|_\infty$, 则 $c < \infty$ 且 $\|S^{(1d\lambda)}\phi\|_\infty \leqslant \|\phi\|_\infty \leqslant c$, 因而由 (10.24) 知

$$|\Omega^{(1,d\lambda)}S^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\xi)| \leqslant 2|\xi|c(1 + 2d\lambda), \ \xi \in X_0^{(1)},$$

于是由 (10.23) 知 $|H\Omega^{(1,d\lambda)}S^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta)| \leqslant 2|\eta|c(1 + 2d\lambda)$, $\eta \in X_0^{(d)}$. 类似地由 (10.23), (10.24) 有

$$|\Omega^{(d,\lambda)}HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta)| \leqslant 2|\eta|c(1 + 2d\lambda), \ \eta \in X_0^{(d)}.$$

故由 (10.19) 知 (10.22) 的右边有意义. 今往证 (10.22) 成立.

$$\forall \Delta s \in R, \ 0 < |\Delta s| < (|t - s| \wedge s), \ \eta \in X_0^{(d)},$$

(10.25) $\frac{1}{\Delta s}[S^{(d,\lambda)}(t - s - \Delta s)HS^{(1,d\lambda)}(s + \Delta s)\phi(\eta)$

$$- S^{(d,\lambda)}(t-s)HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta)] = S^{(d,\lambda)}(t-s-\Delta s)$$

$$\cdot H\left[\frac{S^{(1,d\lambda)}(s+\Delta s) - S^{(1,d\lambda)}(s)}{\Delta s}\right]\phi(\eta)$$

$$+ \frac{S^{(d,\lambda)}(t-s-\Delta s) - S^{(d,\lambda)}(t-s)}{\Delta s} HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta)$$

$$= I_1(\Delta s) + I_2(\Delta s)(\text{记})$$

显然有

$$\lim_{\Delta s\to 0} I_2(\Delta s) = S^{(d,\lambda)}(t-s)Q^{(d,\lambda)}HS^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta).$$

而由中值公式，(10.24) 及 $E_A^{(d,\lambda)}|A^{(d,\lambda)}(t)| \leqslant e^{\omega t}|A|$ 知

$$|I_1(\Delta s) - S^{(d,\lambda)}(t-s)HQ^{(1,d\lambda)}S^{(1,d\lambda)}(s)\phi(\eta)|$$

$$\leqslant \sum_{\xi\in X_0^{(d)}} p^{(d,\lambda)}(t-s-\Delta s,\eta,\xi)|HQ^{(1,d\lambda)}$$

$$(S^{(1,d\lambda)}(s+\theta\Delta s) - S^{(1,d\lambda)}(s))(\phi(\xi)|$$

$$\leqslant 2(1+2d\lambda)\|(S^{(1,d\lambda)}(\theta\Delta s)-I)\phi\|_\infty E_\eta^{(d,\lambda)}|\eta_{t-s-\Delta s}|$$

$$\leqslant 2(1+2d\lambda)\|(S^{(1,d\lambda)}(\theta\Delta s)-I)\phi\|_\infty e^{\omega(t-s-\Delta s)}|\eta|$$

$$\to 0 \ (\text{当 } \Delta s\to 0),$$

其中倒数第二步用到 $\eta_t = I_{A^{(d,\lambda)}(t)}$ 与 $A^{(d,\lambda)}(t)$ 等同. 故在 (10.25) 中令 $\Delta s\to 0$. 即得 (10.22) 至此定理完全获证. □

11. 关于 $\lambda_c^{(d)}$，还可证明 [6, 第 VI 章 (4.7)]

$$\lim_{d\to\infty} d\lambda_c^{(d)} = \frac{1}{2}. \tag{11.1}$$

对于 $\lambda_c^{(1)}$ 的下界应用 (3.3) 还可以改进，例如可以证明

$$\lambda_c^{(1)} \geqslant 1.28 \tag{11.2}$$

而对于 $\lambda_c^{(1)}$ 的上界 2，目前还没有改进的办法. 对于 $\lambda_c^{(1)}$ 的精确值的求出是一个没有解决的问题.

关于基本接触过程，还有一个重要的问题是：当 $\lambda=\lambda_c$ 时，过程是否遍历，即

$$\rho(\lambda_c) = \bar{\nu}^{\lambda_c}\{\eta;\ \eta(0)=1\} = 0\ ? \tag{11.3}$$

12. 最后我们还介绍无穷粒子马尔可夫过程的临界指数这一重要物理概念及有关的数学问题.

考虑一个具单参数族 λ 的无穷粒子模型（例如基本接触过程或紧邻伊辛模型—其中参数常用 β 表示），设有一临界值 λ_c 使参数 λ 经过 λ_c，模型的性质有一突变（对于任意维的基本接触过程及维数大于 1 的紧邻模型是由遍历变为非遍历）. 此时常有定义在 $\lambda > \lambda_c$ 或 $\lambda < \lambda_c$ 上的函数 $f(\lambda)$ 使得当 $\lambda \to \lambda_c$ 时 $f(\lambda) \to 0$. 在二维紧邻伊辛模型的情形，一个例子是

$$(12.1) \qquad f(\beta) = \bar{\nu}_{1\beta}\{\eta : \eta(u) = 1\} - \frac{1}{2}, \quad \beta \geqslant \beta_c$$

（参看第三章 § 4 第 16 目）. 而如果 (11.3) 成立，则对基本接触过程来说，$f(\lambda) \triangleq \rho(\lambda)(\lambda > \lambda_c)$ 是另一个例子. 人们希望在很多情形下有常数 c，β 存在使当 $\lambda \to \lambda_c$ 时

$$(12.2) \qquad f(\lambda) \sim c|\lambda - \lambda_c|^\beta,$$

（此处 $f(\lambda) \sim g(\lambda)$ 理解为 $f(\lambda)/g(\lambda) \to 1$）. 此时常数 β 称为关于 f 的**临界指数**. 对于二维紧邻伊辛模型，由 § 3.4 第 16 目所引述的 Onsager 结果易知：关于 (12.1) 的临界指数是 1/8. 对于基本接触过程，关于 $f(\lambda) \triangleq \rho(\lambda)$ 的临界指数（设 (11.3) 成立）是否存在也是一个未解决的问题. 即令 (11.3) 没有证明，关于 $f(\lambda) \triangleq \rho(\lambda) - \rho(\lambda_c)$，(12.2) 能否成立也是一个有兴趣的问题.

附　　录

为了使读者便于阅读，现将正文中用到的一些有关拓扑及测度弱收敛的结果汇集在下面．其中一些不易查找或本书专用的结果，则叙述出来并加以证明；一些容易查到的重要结果则述而不证；至于那些属于一般参考书中的概念(例如拓扑、距离、紧空间等)和结果则不加叙述地加以应用．符号$\mathscr{F}(\Lambda)$，$X(\Lambda)$，$\mathscr{F}$，$\cdots$的意义与§1.2.1同．

§1　有关拓扑的一些结果

1. 定理（Tychonoff）紧空间的乘积拓扑空间仍然是紧空间．

2. 定理　设 $\forall n\in Z_+$，Y_n 是一距离空间，ρ_n 为其距离．如果

$$\forall \eta_i \triangleq \{\eta_i(n):\ n\in Z_+\}\in X\triangleq \prod_{n\in Z_+} Y_n,\quad i=1,2,$$

定义

$$(2.1)\qquad \rho(\eta_1,\eta_2)\triangleq \sum_{n\in Z_+}\frac{1}{2^{n+1}}\ [\rho_n(\eta_1(n),\ \eta_2(n))\wedge 1],$$

其中 $a\wedge 1$ 表示 a 与 1 之中的较小者．则 $(X,\ \rho)$ 是一距离空间且由 ρ 诱导出的拓扑就是乘积拓扑．

证. 显然 $\forall n\in Z_+$，$\rho_n(\cdot,\ \cdot)\wedge 1$ 仍然是 Y_n 的一个距离且与 ρ_n 拓扑等价，因而易见 ρ 是 X 的一个距离．

今往证：关于 ρ 的开集是关于乘积拓扑的开集．事实上，若 $S(\eta,\ 2^{-p})$ 是 X 中以 $\eta\in X$ 为心，以 2^{-p}，$p\in Z_+$ 为半径的球，则

$$U\triangleq\{\xi:\ \rho_n(\eta(n),\xi(n))<2^{-p-1},\ n=0,\cdots,p+1\}$$

$$=\prod_{n=0}^{p+1} S_n(\eta(n),\ 2^{-p-1}) \times \sum_{n=p+2}^{\infty} Y_n$$

为乘积拓扑基的元，其中 $S_n(\eta(n),\ 2^{-p-1})$为 Y_n 中以 $\eta(n)$ 为心，以 2^{-p-1} 为半径的开球；且 $\forall \xi \triangleq \{\xi(n): n\in Z_+\}\in U$，由(2.1)知

$$\rho(\eta,\ \xi) \leqslant \sum_{n=0}^{p+1} \frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^{-p-1} + \sum_{n=p+2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$< 2^{-p-1} + 2^{-p-1} = 2^{-p}.$$

因而 $\eta\in U\subset S(\eta,\ 2^{-p})$. 设 $G\subset X$ 是关于 ρ 的开集，则 $\forall \eta\in G$，$\exists p(\eta)\in Z_+$ 使 $S(\eta,\ 2^{-p(\eta)})\subset G$，于是由上面所证明的事实知存在乘积拓扑基中的元

$$U_\eta = \prod_{n=0}^{p+1} S_n(\eta(n),\ 2^{-p(\eta)-1}) \times \prod_{n=p(\eta)+2}^{\infty} Y_n$$

使

$$\eta\in U_\eta\subset S(\eta,\ 2^{-p(\eta)}),$$

因而

$$G=\bigcup_{\eta\in G} S(\eta,\ 2^{-p(\eta)})\supset \bigcup_{\eta\in G} U_\eta\supset G.$$

故 $G=\bigcup\limits_{\eta\in G} U_\eta$为关于乘积拓扑的开集.

反之，若$U_n \triangleq U_n \times \prod\limits_{m\in Z_+\setminus n} Y_m \subset X$，$U_n$ 为 X_n 中的一个开集，则 $\forall \eta\in U$，有一 $r(\eta)>0$ 使 $S_n(\eta(n),\ r(\eta))\subset U_n$，于是由 $\rho(\eta, \xi)\geqslant 2^{-(n+1)}\rho_n(\eta(n),\ \xi(n))$ 知

$$S(\eta,\ r(\eta)2^{-(n+1)})\subset U,$$

从而

$$U\subset \bigcup_{\eta\in U} S(\eta, r(\eta)2^{-(n+1)})\subset U,$$

即 $U=\bigcup\limits_{\eta\in U} S(\eta,\ r(\eta)2^{-n-1})$ 是关于 ρ 的开集. 故关于乘积拓扑

的开集也是关于 ρ 的开集.

总之,由 ρ 导出的拓扑与乘积拓扑等价. □

3. 推论 设 S 为可数集, $\forall u\in S$, Y_u 是紧距离空间,则

$$X=\prod_{u\in S} Y_u$$

也是紧距离空间,其中 X 的距离可如下赋予:设 ρ_u 是 Y_u 的距离,对 S 的元任给一编号, $S=\{u_1, u_2, \cdots\}$, $\forall\eta_i\triangleq\{\eta_i(u); u\in S\}\in X$, $i=1, 2$, 令

$$(3.1)\qquad \rho(\eta_1,\eta_2)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\rho_{u_n}(\eta_1(u_n), \eta_2(u_n))\wedge 1\right].$$

4. 引理 设 S 为可数集, $\forall u\in S$, $2\leqslant|Y_u|<\infty$, Y_u 赋散拓扑, $X=\prod_{u\in S} Y_u$ 赋乘积拓扑. 则

(i) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $A\subset X(\Lambda)$, $A\times X(S\backslash\Lambda)$ 既是 X 的开集又是闭集.

(ii) X 的 Borel σ-域 $\mathscr{B}(X)=\mathscr{F}$. 若 $\forall u\in S$, 令

$$\rho_u(y_1, y_2)=\delta(y_1, y_2),\quad y_1, y_2\in Y_u,$$

则 X 关于 (3.1) 定义的 ρ 的 Borel σ-域也等于 $\mathscr{F}$.

证. 由于有限个开(闭)集之并仍然是开(闭)集,而 $A\subset X(\Lambda)$ 由有限个元组成,所以要证 (i) 只需证, $\forall\xi\in X(\Lambda)$, $\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)$ 既是 X 的开集也是闭集. 显然 $\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)$ 是 X 的开集,而

$$(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))^c=\bigcup_{\eta\in X(\Lambda)\backslash\xi}\{\eta\}\times X(S\backslash\Lambda)$$

是有限个开集的并,因而是开集,于是 $\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)$ 也是闭集. 故 (i) 获证.

由 X 的拓扑基

$$\left\{\prod_{u\in\Lambda} A_u\times X(S\backslash\Lambda):\ A_u\subset Y_u,\ u\in\Lambda\in\mathscr{S}\right\}\subset\mathscr{F},$$

且为可数集类，所以X的开集类也包含在$\mathscr{F}$之中，所以$\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{F}$. 反之$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\mathscr{F}(\Lambda)=\{A\times X(S\setminus\Lambda):A\subset X(\Lambda)\}$包含在$X$的开集类之中，所以$\mathscr{F}=\sigma\left(\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}}\mathscr{F}(\Lambda)\right)\subset\mathscr{B}(X)$. 故$\mathscr{B}(X)=\mathscr{F}$. 而 (ii) 的第二个结论由推论 3 立刻得出. □

若应用更多拓扑学知识，则引理 4(ii) 的结论可以大大推广.

5. 引理 设S为可数集，$\forall u\in S$, Y_u是拓扑空间，

$$X=\prod_{u\in S}Y_u$$

赋乘积拓扑. 并分别记Y_u, X的 Borel σ-域为$\mathscr{B}(Y_u)$, $\mathscr{B}(X)$.

(i) 若Y_u具有可数拓扑基$\{A_u^{(n)}: n\in Z^+\}$，则

$$\mathscr{B}(X)=\prod_{u\in S}\mathscr{B}(Y_u); \tag{5.1}$$

(ii) 若Y_u, $u\in S$, 为可分距离空间，则 (5.1) 成立；

(iii) 若Y_u, $u\in S$, 为紧距离空间，则 (5.1) 成立.

证. 记Y_u的开集类为$\mathscr{Y}_u$. 则

$$\mathscr{X}\triangleq\left\{\prod_{u\in\Lambda}G_u\times X(S\setminus\Lambda): G_u\in\mathscr{Y}_u,\ u\in\Lambda,\ \Lambda\in\mathscr{S}\right\}$$

为X的一个拓扑基，$\mathscr{B}(X)=\sigma(\mathscr{X})$. 于是$\forall u\in S$,

$$\mathscr{B}(Y_u)\times X(S\setminus u)=\sigma(G_u\times X(S\setminus u):\ G_u\in\mathscr{Y}_u)\subset\mathscr{B}(X),$$

$$\prod_{u\in S}\mathscr{B}(Y_u)=\sigma(\mathscr{B}(Y_u)\times X(S\setminus u):\ u\in S)\subset\mathscr{B}(X) \tag{5.2}$$

另一方面，$\forall G_u\in\mathscr{Y}_u$, $u\in\Lambda$, $\Lambda\in\mathscr{S}$, 记$\Lambda=\{u_1,\cdots,u_m\}$, 则

$$\prod_{u\in\Lambda}G_u\times X(S\setminus\Lambda)=\prod_{u\in\Lambda}\left(\bigcup_{k_u}A_u^{(n_{k_u})}\right)\times X(S\setminus\Lambda)$$

$$=\bigcup_{k_{u_1}}\cdots\bigcup_{k_{u_m}}\prod_{u\in\Lambda}A_u^{(n_{k_u})}\times X(S\setminus\Lambda),$$

故 $\mathscr{X}_0 \triangleq \left\{\prod_{u\in\Lambda} A_u^{(n_u)} \times X(S\setminus\Lambda): n_u \in Z_+, u\in\Lambda, \Lambda\in\mathscr{S}\right\}$ 是 X 的一个可数拓扑基. 且 $\mathscr{X}_0 \subset \prod_{u\in S} \mathscr{B}(Y_u)$. 而 X 的任一开集 G 是 $\mathscr{X}_0$ 中最多可数个元的并,所以 $G \in \prod_{u\in S} \mathscr{B}(Y_u)$, 从而

$$\mathscr{B}(X) \subset \prod_{u\in S} \mathscr{B}(Y_u).$$

结合 (5.2) 即得 (5.1), 故 (i) 获证. 由 [5, (3.9.4)] 知可分距离空间 Y_u 必有可数拓扑基, 故由 (i) 知 (ii) 成立. 再由 [5, (3.16.1), (3.16.2)] 知紧距离空间可分,因此 (iii) 成立. □

§2 关于函数

首先有下列类似于数学分析中有关连续函数的结果.

1. 定理 紧距离空间上实(或复)值连续函数在空间上有界且一致连续.

2. 定理 紧距离空间上的实值连续函数必有它的最大值与最小值.

定理 1、2 可以类似于通常数学分析教科书中相应结果的证法来证明. 因此从略而将它们作为习题留给读者.

3. 定理 (Stone-Weierstrass) 设 X 为一紧距离空间,以 $C(X)$ 表 X 上的全体实值函数作成的 Banach 空间 (范数取 $\|f\| \triangleq \sup\{|f(\eta)|; \eta\in X\}$). 若 $A\subset C(X)$ 且对函数的乘法封闭(即为一代数),包含常值函数、分离 X 的点(即 $\forall\eta, \xi\in X, \eta\neq\xi, \exists f\in A$ 使 $f(\eta)\neq f(\zeta)$), 则 A 在 $C(X)$ 中稠.

换句话说,若 $B\subset C(X)$ 分离 X 的点, 则 $\forall f\in C(X)$, $\exists\{g_n\}$ 使 g_n 一致地收敛于 f, 且每一 g_n 是 B 的元的多项式函数.

这条定理的证明较长，此处从略．有兴趣的读者可参看[5，VII.3]

4. 本节以下除特殊声明外设 $X=\prod_{u\in S}Y_u$，S 为可数集，$\forall u\in S$，$2\leqslant|Y_u|<\infty$，Y_u 赋散拓扑，X 赋乘积拓扑．$\forall\Lambda\in\mathscr{S}$，定义

$$(4.1)\qquad C_yl_\Lambda(X)\triangleq\{f:f:\ X\to R,\ f(\eta)=f(\eta_\Lambda\times\zeta),\ \eta\in X,\ \zeta\in X(S\backslash\Lambda)\},$$

及 X 上的柱函数类

$$(4.2)\qquad C_yl(X)\triangleq\bigcup_{\Lambda\in\mathscr{S}}C_yl_\Lambda(X).$$

即当 $f\in C_yl_\Lambda(X)$ 时，f 的值只与 $\eta\in X$ 在 $\Lambda\in\mathscr{S}$ 上的坐标有关；当 $f\in C_yl(X)$ 时，f 的值只与有限个坐标有关．

5. 引理 (i) $C_yl_\Lambda(X)$ 为 $|X(\Lambda)|$ 维线性空间，函数集

$$\{f:f=I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)},\ \xi\in X(\Lambda)\}$$

是它的一个基；

(ii) $C_yl(X)$ 是由函数集

$$\{f:f=I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)},\ \xi\in X(\Lambda),\ \Lambda\in\mathscr{S}\}$$

张成的线性空间；

(iii) 若 $X=\{0,1\}^S$（即 $\forall u\in S$，$Y_u=\{0,1\}$），令

$$(5.1)\qquad f_\Lambda(\eta)\triangleq\prod_{u\in\Lambda}\eta(u),\quad \eta\in X,\ \Lambda\in\mathscr{S},$$

则 $\{f_{\tilde\Lambda}:\tilde\Lambda\subset\Lambda\}$ 是线性空间 $C_yl_\Lambda(X)$ 的一个基，因而函数集 $\{f_\Lambda:\Lambda\in\mathscr{S}\}$ 张成线性空间 $C_yl(X)$．

证. (ii) 显然是 (i) 的直接推论．今往证(i)．$\forall f\in C_yl_\Lambda(X)$，由 $C_yl_\Lambda(X)$ 的定义知 $f(\xi\times\zeta)$，只与 $\xi\in X(\Lambda)$ 有关而与 $\zeta\in X(S\backslash\Lambda)$ 无关，令 $a(\xi)=f(\xi\times\zeta)$，则显然有

$$f(\eta)=\sum_{\xi\in X(\Lambda)}a(\xi)I_{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)}(\eta)$$

即 $f=\sum'_{\xi\in X(\Lambda)} a(\xi)I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)}$, 亦即 $C_y l_\Lambda(X)$ 由函数集 $\{f: f=I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)},\ \xi\in X(\Lambda)\}$ 张成. 而且此函数集的元是线性无关的，事实上，若

$$\sum_{\xi\in X(\Lambda)} c(\xi)I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)}=0,$$

则 $\forall\xi_1\in X(\Lambda)$, $\zeta\in X(S\setminus\Lambda)$, 有

$$c(\xi_1)=\sum_{\xi\in X(\Lambda)} c(\xi)I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)}(\xi_1\times\zeta)=0.$$

故 $\{f: f=I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)},\ \xi\in X(\Lambda)\}$ 是 $C_y l_\Lambda(X)$ 的一个基，因而 $C_y l_\Lambda(X)$ 是 $|X(\Lambda)|$ 维线性空间，(i) 获证.

再往证 (iii), 注意 $\eta(u)=I_{\{1\}\times X(S\setminus u)}(\eta)$, $1-\eta(u)=I_{\{0\}\times X(S\setminus u)}(\eta)$, 于是 $\forall\xi\in X(\Lambda)$, $\exists\tilde{\Lambda}\subset\Lambda$ 使 $\xi=\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}\times\theta_{\Lambda\setminus\tilde{\Lambda}}$, 因而

$$(5.2)\qquad I_{\{\xi\}\times X(S\setminus\Lambda)}(\eta)=\prod_{u\in\tilde{\Lambda}}\eta(u)\prod_{u\in\Lambda\setminus\tilde{\Lambda}}(1-\eta(u))$$

$$=\sum_{\tilde{\Lambda}\subset\Lambda_1\subset\Lambda}(-1)^{|\Lambda_1\setminus\tilde{\Lambda}|}\prod_{u\in\Lambda_1}\eta(u)$$

$$=\sum_{\tilde{\Lambda}\subset\Lambda_1\subset\Lambda}(-1)^{|\Lambda_1\setminus\tilde{\Lambda}|}f_{\Lambda_1}(\eta).$$

故由 (i) 知当 $X=\{0,1\}^S$ 时, $\{f^{\tilde{\Lambda}}:\tilde{\Lambda}\subset\Lambda\}$ 张成 $C_y l_\Lambda(X)$. 但 $C_y l_\Lambda(X)$ 的维数为 $|X(\Lambda)|=2^{|\Lambda|}$, 而 $\{f^{\tilde{\Lambda}}:\tilde{\Lambda}\subset\Lambda\}$ 的元数为 $2^{|\Lambda|}$, 因此 $\{f^{\tilde{\Lambda}}:\tilde{\Lambda}\subset\Lambda\}$ 为线性无关组且为 $C_y l_\Lambda(X)$ 的一组基。□

6. 引理 (i) $C_y l(X)\subset C_b(X)$; (ii) $C_y l(X)$ 在 $C_b(X)$ 中稠; (iii) $\forall f\in C_b(X)$. 对 $\Lambda\in\mathscr{S}$ 定义

$$(6.1)\qquad f^{(\Lambda)}\triangleq f((\cdot)_\Lambda\times\zeta^{(\Lambda)}),$$

其中 $\zeta^{(\Lambda)}$ 为 $X(S\setminus\Lambda)$中任意取定的元，则当 $\Lambda\nearrow S$ 时，在 $C_b(X)$ 中有 $f^{(\Lambda)}\to f$.

证. 为证 (i)，只需证: $\forall f\in C_y l_\Lambda(X)$, 当 $\eta_n\in X\to\eta$ 时有

$f(\eta_n) \to f(\eta)$. 为此对 S 赋与一个编号 $\{u_1, \cdots,\}$, 并按 (1.3.1) 及引理 1.4(ii) 中的说明定义 X 的距离 ρ, 则当 $\eta_n \to \eta$ 时, $\rho(\eta_n, \eta) \to 0$, 因而 $\exists n_0 \in Z_+$ 使当 $n \geqslant n_0$ 时, $\forall u \in \Lambda$ 有 $\eta_n(u) = \eta(u)$, 即 $(\eta_n)_\Lambda = \eta_\Lambda$, 于是当 $n \geqslant n_0$ 时, $f(\eta_n) = f(\eta)$. 故 (i) 获证.

(ii) 是 (iii) 的直接推论,故只需证 (iii). $\forall f \in C_b(X)$, 由定理 1 知 f 一致连续,即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使当 $\rho(\eta, \xi) < \delta$ 时有 $|f(\eta) - f(\xi)| < \varepsilon$. 设相应于 ρ 的 S 的编号为$\{u_1, u_2, \cdots\}$. 当 $\Lambda \supset \{u_1, \cdots u_{n_0}\}$, 其中 n_0 满足 $2^{-(n_0-1)} < \delta$ 时, $\forall \eta \in X$, 有

$$\rho(\eta_\Lambda \times \zeta^{(\Lambda)}, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n((\eta_\Lambda \times \zeta^{(\Lambda)})(u_n), \eta(u_n))$$

$$\leqslant \sum_{n > n_0} \frac{1}{2^n} = 2^{-n_0} < \delta,$$

因而

$$|f^{(\Lambda)}(\eta) - f(\eta)| = |f(\eta_\Lambda \times \zeta^{(\Lambda)}) - f(\eta)| < \varepsilon,$$

即 $\|f^\Lambda - f\| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{\Lambda \uparrow S} \|f^{(\Lambda)} - f\| = 0$, 即 (iii) 获证. □

§3 关于测度弱收敛

1. 定理 设 (X, ρ) 是一距离空间, $C_b(X)$ 表 X 上的一切有界实(或复)值连续函数组成的集, $f \in C_b(X)$ 的范数

$$\|f\| \triangleq \sup_{\eta \in X} |f(\eta)|.$$

$U(X) \subset C_b(X)$ 表一切有界且一致连续函数组成的集.

设 $\mu \in \mathscr{P}(X)$, $\{\mu_n: n \in Z_+\} \subset \mathscr{P}(X)$, 则下列五个命题等价:

(1.1) $\quad \forall f \in C_b(X)$, $\int f d\mu_n \to \int f d\mu \ (n \to \infty)$;

(1.2) $\forall f\in U(X)$, $\int f d\mu_n \to \int f d\mu \quad (n\to\infty)$;

(1.3) $\forall C$ 闭集， $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(C)\leqslant \mu(C)$;

(1.4) $\forall G$ 开集， $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu_n(G)\geqslant \mu(G)$;

(1.5) $\forall B\in \mathscr{B}(X)$, $\mu(\partial B)=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)=\mu(B)$

满足(1.1)的 $\{\mu_n: n\in Z_+\}$ 称为**弱收敛于** μ，记作 $\mu_n\Rightarrow\mu$. 若对 $\{\mu_n: n\in Z_+\}\subset\mathscr{P}(X)$ 有一 $\mu\in\mathscr{P}(X)$ 使 $\mu_n\Rightarrow\mu$，则称 $\{\mu_n: n\in Z_+\}$ **弱收敛**.

证. (1.1)⇒(1.2) 显然. 由于 $C(G)$ 为闭(开)集当且仅当 $C^c(G^c)$ 为开(闭)集以及 $\mu(X)=\mu_n(X)=1$，(1.3) 与 (1.4) 等价.

(1.3), (1.4) ⇒ (1.5): $\forall B\in\mathscr{B}(X)$, $\mu(\partial B)=0$, 有 $\mu(\bar{B})=\mu(\dot{B})=\mu(B)$, 其中 $\bar{B}$, $\dot{B}$ 分别为 B 的闭包及内核. 于是由(1.3), (1.4)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(B)\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(\bar{B})\leqslant\mu(\bar{B})=\mu(B)$$

$$=\mu(\dot{B})\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(\dot{B})\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(B).$$

从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mu_n(B)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mu_n(B)=\mu(B)$，即(1.5)成立.

于是要证定理，只需证: (1.2)⇒(1.3), (1.5)⇒(1.1)

(1.2)⇒(1.3): 设 C 为闭集，令 $f_k\triangleq(1+k\rho(\cdot,C))^{-1}, k\geqslant 1$, 其中 $\rho(\eta, C)\triangleq\inf\limits_{\xi\in C}\rho(\eta,\xi)$, 则 $\|f_k\|\leqslant 1$, 且 $\forall \eta,\xi\in X$,

$$|f(\eta)-f(\xi)|\leqslant k|\rho(\eta, C)-\rho(\xi, C)|\leqslant k\rho(\eta,\xi).$$

于是 $f_k\in U(X)$. 此外 $f_k\searrow I_C(k\uparrow\infty)$. 故由(1.2)，控制收敛定理知

$$\mu(C)=\lim_{k\to\infty}\int f_k d\mu=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int f_k d\mu_n$$

$$\geqslant\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int I_C d\mu_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu(C),$$

$(1.5)\Rightarrow(1.1)$：$\forall f\in C_b(X)$，$\forall\varepsilon>0$，由于 $\mu(X)<\infty$，至多有可数个 $a\in[-\|f\|-1,\|f\|+1]$使 $\mu(\{\eta\in X:f(\eta)=a\})>0$，故 $\exists N\in Z_+$ 及 $\{a_i:i\in Z_+\cap[0,N]\}\subset R^1$ 满足

$$-\|f\|-1\triangleq a_0<a_1<\cdots<a_N\triangleq\|f\|+1;$$

$$\mu(\{f=a_i\})=0,\ a_i-a_{i-1}<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,N.$$

令 $B_i\triangleq\{\eta\in X:a_{i-1}\leqslant f(\eta)<a_i\},i=1,\cdots,N$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{N}B_i=X$，$B_i\cap B_j=\phi$，$i\neq j$，且 $\mu(\partial B_i)\leqslant\mu(f=a_i)+\mu(f=a_{i-1})=0$。于是

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{N}a_iI_{B_i}\right\|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant N}(a_i-a_{i-1})<\varepsilon,$$

$$\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|\leqslant\left|\int fd\mu_n-\sum_{i=1}^{N}a_i\mu_n(B_i)\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{N}a_i(\mu_n(B_i)-\mu(B_i))\right|+\left|\int fd\mu-\sum_{i=1}^{N}a_i\mu(B_i)\right|$$

$$\leqslant2\varepsilon+\sum_{i=1}^{N}|a_i|\,|\mu_n(B_i)-\mu(B)|\xrightarrow{(n\to\infty)}2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 任意，所以(1.1)成立。□

2. 推论 将定理 1 中的 $\mathscr{P}(X)$ 换成 $\mathscr{M}^+(X)$（$\mathscr{B}(X)$ 上的非负有限测度集），并设 $\{\mu_n:n\in Z_+\}$一致有界．在(1.3)，(1.4)中还假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$．则定理 1 的结论仍然成立．

3. 推论 设 $\lambda,\mu\in\mathscr{M}^+(X)$，则下列三个命题等价．

(3.1) $\forall f\in C_b(X)$，　$\int fd\mu=\int fd\lambda$，

(3.2) $\forall f\in U(X)$，　$\int fd\mu=\int fd\lambda$，

(3.3)　　　　$\lambda=\mu$．

证．$(3.3)\Rightarrow(3.1)\Rightarrow(3.2)$ 是显然的．因此只需证：$(3.2)\Rightarrow$

(3.3). 为此令 $\mu_n \equiv \mu$, $n \in Z_+$, 则由推论 2 及(3.2)知 $\mu_n \Rightarrow \lambda$,由(1.4)知 $\forall G$ 开集,

$$\mu(G) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \lambda(G),$$

同法令 $\lambda_n \equiv \lambda$, $n \in Z_+$ 可得: $\forall G$ 开集 $\lambda(G) \geqslant \mu(G)$. 故 $\forall G$ 开集, $\lambda(G) = \mu(G)$. 由全体开集的类生成 $\mathscr{B}(X)$ 即知 (3.3) 成立. □

注. 应用当 C 为闭集时, $f_k \triangleq (1 + k\rho(\cdot, C))^{-1} \in U(X)$, $f_k \searrow I_C$ 仿 (1.2)⇒(1.3)之法亦可证明: (3.2)⇒(3.3).

4. 本节以下除特殊声明外,设 $X = \prod_{u \in S} Y_u$, S 为可数集, $2 \leqslant |Y_u| < \infty$, Y_u 赋散拓扑, X 赋乘积拓扑,称

$$\mathscr{R} \triangleq \{\Lambda \times X(S \backslash \Lambda): \Lambda \in \mathscr{S},\ A \in X(\Lambda)\}$$

为 X 的**柱集类**

5. 引理 设 μ 为 $\mathscr{R}$ 上的非负有限值的有限可加集函数,则 μ 在 $\mathscr{R}$ 上 σ- 可加,因而 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{B}(X)$ 上的有限测度.

证. 设 $A, A_n \in \mathscr{R}$, $A_n, n \in Z_+$, 两两不交,且 $A = \bigcup_n A_n$. 由引理 1.4(i) 知 A 也是闭集, 而每一 A_n 为开集, 再由定理 1 知 X 是紧空间, 所以 A 也是紧集. 于是由紧性知存在有限个 $A_{n_1}, \cdots, A_{n_k}$ 使 $A = \bigcup_{l=1}^{k} A_{n_l}$, 再由 A_n, $n \in Z_+$, 两两不交知: 当 $n \neq n_l$ 时, $A_n = \phi$. 故

$$\mu(A) = \sum_{l=1}^{k} \mu(A_{n_l}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

即 μ 在 $\mathscr{R}$ 上 σ-可加. 由于 $\mathscr{R}$ 是集代数,且 $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{F}$. 所以由测度扩张定理知 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{F} = \mathscr{B}(X)$ (引理 1.4 (ii) 上的有限测度. □

6. 引理 概率测度序列 $\{\mu_n: n \in Z_+\} \subset \mathscr{P}(X)$ 弱收敛的充要

条件是

(6.1) $\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda))$存在.

证. 若$\{\mu_n: n \in Z_+\} \subset \mathscr{P}(X)$弱收敛,则$\exists \mu \in \mathscr{P}(X)$使(1.5)成立. 而$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall \xi \in X(\Lambda)$,由引理1.4(i)知$\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)$既是开集又是闭集. 所以$\partial(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)) = \phi$, $\mu(\partial(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda))) = 0$,于是由(1.5)知

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)) = \mu(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)),$$

即(6.1)成立.

反之,若(6.1)成立,则$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\forall A \subset X(\Lambda)$,令

(6.2) $$\mu(A \times X(S\setminus\Lambda)) \triangleq \sum_{\xi \in A} \lim_{n\to\infty} \mu_n(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)),$$

则由$|A| < \infty$知μ为$\mathscr{R}$上的非负有限值有限可加集函数. 事实上,由$|A| < \infty$, μ_n有限可加及(6.1)得知$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A \times X(S\setminus\Lambda)) = \sum\limits_{\xi \in A} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda))$存在,再由(6.2)即知

(6.3) $$\mu(A \times X(S\setminus\Lambda)) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \times S\setminus\Lambda)).$$

于是由μ_n为$\mathscr{R}$上的非负有限值有限可加集函数知μ也具有同样性质且$\mu(X)=1$.故由引理5知μ可以唯一地扩张成$\mathscr{B}(X)=\mathscr{F}$上的概率测度. 为简单计仍记为$\mu$.

由μ为概率测度,引理2.5及(6.2)易知(1.1)中的极限式$\forall f \in C_y l(X)$成立.再由引理2.6(ii)知(1.1)成立. 故$\mu_n \Rightarrow \mu$. □

注. 条件充分性的证明的主要困难在于μ的存在性.

由引理6及其证明已经得到

7. 推论 设$\mu \in \mathscr{P}(X)$, $\{\mu_n: n \subset Z_+\} \in \mathscr{P}(X)$. 若$\mu_n \Rightarrow \mu$,即$\forall A \in \mathscr{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$;反之,若$\forall \Lambda \in \mathscr{S}$, $\xi \in X(\Lambda)$有$\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda)) = \mu(\{\xi\} \times X(S\setminus\Lambda))$,则$\mu_n \Rightarrow \mu$.

8. 引理 若$\{\mu_n; n \in Z_+\} \subseteq \mathscr{P}(X)$,则存在一个子序列$\{n_k\}$

使 $\{\mu_{n_k}: k\in Z_+\}$ 弱收敛. 即 $\mathscr{P}(X)$ 的任何子集具有弱列紧性.

证. 因为集 $\{\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda): \Lambda\in\mathscr{S},\ \xi\in X(\Lambda)\}$ 可数, 所以由对角线手续知存在 $\{n_k: k\in Z_+\}$ 使 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_{n_k}(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda))$ 存在. 故由引理 6 知 $\{\mu_{n_k}: k\in Z_+\}$ 弱收敛. □

9. 引理 设 $X=\{0,1\}^S$, $A_\Lambda \triangleq \{\eta\in X: \eta(u)=1,\ u\in\Lambda\}$, $\Lambda\in\mathscr{S}$. 则 $\{\mu_n: n\in Z_+\}\subset\mathscr{P}(X)$ 弱收敛当且仅当

(9.1) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_\Lambda)$ 存在.

特别, $\mu_n\in\mathscr{P}(X)\Rightarrow\mu\in\mathscr{P}(X)$ $(n\to\infty)$ 当且仅当

(9.2) $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\mu(A_\Lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_\Lambda)$.

证. 由 (2.5.1) 知 $f_\Lambda = I_{A_\Lambda} = I_{\{1_\Lambda\}\times X(S\backslash\Lambda)}$, 于是由引理 6 知条件 (9.1) 的必要性成立. 反之若 (9.1) 成立, 由 (2.5.2) 知 $\forall\Lambda\in\mathscr{S}$, $\forall\xi\in X(\Lambda)$, $\forall n\in Z_+$ (此时 $\xi=\mathbf{1}_\Delta\times\theta_{\Lambda\backslash\Delta}$)

$$\mu_n(\{\xi\}\times X(S\backslash\Lambda)) = \sum_{\Delta\subset\Lambda_1\subset\Lambda}(-1)^{|\Lambda_1\backslash\Delta|}\mu_n(A_{\Lambda_1}),$$

于是(6.1)成立,因而由引理 6 知 $\{\mu_n: n\in Z_+\}$ 弱收敛. □

后　记

在本书正文之后，作者还想冒昧地写出一些话，这就是本书的内容与有关的粒子系统书籍的关系，有关的进一步内容的概括介绍．这样做的目的是希望对有志于进一步学习或研究粒子系统这一分支的读者有所邦助．作为本书，是一个结束语；可是对于某些读者来说，也许是某种起点．

第一章的存在定理及其证明基本上取自[6]的第一章，这里采用的是泛函分析方法．为了便于国内读者阅读，整个地改写了：证明的叙述详细，引用的文献也改为国内容易找到的．这里组态空间的每一因子空间都是紧距离空间，对于因子空间非紧的情形就困难得多．稍早一些的发展情况及文献可参看[6,IX]．我们北京师大的粒子系统小组在学习非平衡统计物理和粒子系统理论的过程中，分析了反应扩散模型（原称为多元线性 Master 方程）[14]．[15]研究了有限维的存在唯一性、常返性及正常返性问题，文中建议了一种将多维 Q 过程归结为一维 Q 过程来研究的方法．由于在[15]中得出了有限维 Schlögl 模型具有遍历性这一结论，与物理学者相当普遍地认为 Schlögl 模型有分岔现象（非平衡相变）的观点有出入，类比于平衡态统计物理的相变研究，我们认为研究无穷维反应扩散模型是恰当的．对单物种无穷维反应扩散模型来说，[16] 应用耦合方法证明反应项为线性增长的情形的存在定理，[17]结合 q 过程理论与耦合方法证明了更一般的无穷维反应扩散过程的存在，[18]结合 q 过程理论与 KRW 距离证明更一般的无穷粒子马尔可夫过程的存在性，[17]，[18]中的结果包括[6，IX]中所列各模型的存在性作为特例（以上内容详见[4]第三、六章.）

对多物种情形,[19]应用 Polish 空间上的极大值原理证明：在扩散速度有界的条件下,相应的反应扩散过程存在且唯一.

对于多物种的一般情形，用的是鞅方法. 构造以 $\{0,1\}^S$ 为组态空间的无穷粒子马尔可夫过程的鞅方法可从[6,§I.6]及其所引文献了解. [20]研究了 Q 过程的鞅方法,最近[21],[22]在[20]的基础上,证明在扩散速度不超过线性的条件下,反应扩散模型的鞅解存在,[23]证明了鞅解也是唯一的. 因而由鞅方法原理知相应的无穷维反应扩散过程存在. 关于鞅方法，除了上面提到的以外,[24]结合[20],[25]的方法解决了非线性 Master 方程的鞅解存在与唯一性问题，因而它是 Mckean 意义下的非时齐马尔可夫过程. 非线性 Master 方程是针对非平衡系统的耗散结构理论中的一些模型而提出的一类与反应扩散模型平行的概率模型（参看[14]).

构造无穷粒子系统的方法除了上述的泛函分析方法、耦合方法、鞅方法以外，还有图表示法. 关于图表示法可参看[8],[11]. 最近郑小谷提出了有色随机图表示法，可以用来构造出以 $\{0,1,2\}^{Z^d}$ 为组态空间的无穷粒子马尔可夫过程[26].

第二章讨论可逆测度与 Gibbs 态的方法与国外文献(例如[6,§IV.1,§IV.2])不同. 主要是立足于侯振挺、陈木法提出的抽象场论[27]，这样做可以用有势来给出可逆的充要条件. 而可逆测度与(推广的)Gibbs 态的关系仍然保持. 另外用势来给出 Gibbs 态比用交互作用势(国外相当多的文献称交互作用势为势)显得简洁一些，这也许会有它的作用. 本章的结果最早见于[28],[29],[30]. 这里作了一些整理,[30]还包含了更多的材料,在此文的基础上,国内出现了一批成果,如[31—35]. 最近[26]中得到排它过程的正可逆测度存在的一些充分条件及定理 2.5 的逆命题不真的反例,[36]给出 $\{0,1\}^S$ 上概率测度可逆(等价地为某一势的 Gibbs 态）的充要条件. 关于本章的内容和讨论方法还可参看[6,§IV,

1—2]及其所引文献,[4,第十章]及[37].

第三章讨论耦合方法及其对粒子系统遍历性研究的应用，其内容与[6]中的 §II.1,§III.1—2,§IV.3 大致相当. 除了写得更详细以便于国内读者学习外，我想指出两点：(1)由于对自旋模型，我们已证速度函数的可逆与有势等价，于是在 3.4 里，过程遍历与 Gibbs 态唯一的关系，Dobrushin 关于 Gibbs 态唯一的充分条件等都可以在速度函数有势的条件下讨论. 这样一方面比原来稍广一点，另外由于不必经过交互作用势，也许对某些问题的处理会有好处. 例如对一维紧邻多数选举模型 [6,Ex. 2.12] 便可容易证明当 $\delta\in(0,1)$ 时 Gibbs 态(可逆测度)唯一. (2)§3.5 主要证明一个三元耦合存在定理，这种三元耦合的形式是在[38]中提出的，最近在[39]中应用了它. 但是似乎并没有严格的证明. 此处的证明是根据[40]而整理的.

耦合方法是粒子系统研究中的一个重要方法. 关于耦合方法的研究还可参看[4,第五章]及所引文献，还有[41],[42],[43]. 与耦合有紧密联系的一个论题是 KRW—距离 (实际上可以借助前者估计后者的值). 关于 KRW—距离的作用和文献可参看[4].

§3.4 的后半段(从定理 4 开始)简单地讨论了伊辛模型的相变问题. 这是从可逆粒子系统(按美国的称呼为随机伊辛模型)与伊辛模型的联系(前者是后者的动态系统)而顺带讨论的. 从这个角度讨论的情况可参看[6,IV],[44]及其所引文献. 实际上，从1965年以来，由伊辛模型的近代概率论研究诱发产生了概率论的一个重要的分支，Gibbs 随机场(或简称为随机场). 在这个分支里已经积累了丰富的文献，也出版了很多本专著. 由于篇幅和本书的内容，在此只向读者简单介绍有关的专著[9],[10],[12],[13]. 大致说来，[12]偏重于从概率论(数学)上尽可能一般地对 Gibbs 随机场进行讨论，[13]更注意讨论某些有统计物理背景的模型的相变问题，还讨论了研究相变的重要方法——Peierl's 围道方法的

一般化和重正化群方法的数学化以及它们的应用. [10]系统总结了近廿年来发展的 Gibbs 随机场与相变的现代数学理论的基本原理及其应用,列举了相当详尽的文献,本书在第四部分还介绍了研究相变的另一重要方法——反射正性方法.叙述也较易于阅读.因此对于有志于深入学习和研究 Gibbs 随机场和相变理论的读者是一本好的高级入门书. [9] 是概率大偏差理论对统计物理应用的专著,其中介绍了大偏差理论对 Gibbs 随机场的应用.

第四章讨论无穷粒子马程的对偶原理及其对遍历性研究的应用,其内容大致与[6]中 §III.4—5,§V.1,§VI.1 相当. 在讨论对偶过程的存在与矩估计时,我们充分运用了Q过程的有关定理,使叙述更加清晰. 对于选举过程的对偶过程的直观描述,给予了严格的证明;对于它的遍历性的讨论,为了使读者细致了解对偶原理的应用,作了详细严格的叙述. §4.4中对 $\lambda_c^{(d)}$ 的上界估计所用的方法并不是对偶的应用,写上它为的是完整介绍 $\lambda_c^{(d)}$ 的估计这一无穷粒子系统的典型问题.

[6] 中还讨论其它一些模型的遍历性问题,引述了大量的文献,列举了一系列未解决的问题,值得参考. 我国学者在 [45],[46],[47],[50],[51],[39]中对有关问题进行了一些有意义的工作. 对于无穷维反应扩散过程的遍历性问题. [4, 第十四章]及[52]得出相应于[18]的无穷粒子马尔可夫过程的平稳分布存在的充分条件及平稳分布唯一和过程遍历的充分条件. [53], [54] 讨论了单物种具线性增长和死亡速率的反应扩散过程的遍历性问题,得到发生非平衡相变的临界区域;找出了一切平移不变的平稳分布及相应的吸收域. [55]完全刻划了具线性反应的双物种反应扩散过程的平移不变平稳分布集的构造并且找出了各平移不变的平稳分布的吸引域. [56]研究了 $S=Z$时,一类死亡速率的次数高于生长次数的可逆反应扩散模型,证明了它的平稳分布唯一而且遍历. [24]讨论了非线性 Master 方程的解的分岔现象,即证

明了它的平稳分布的个数等于一幂级数的零点个数，由此找出了 Schlögl 模型的参数的两个区域，它们分别是使模型 Schlögl 的平稳分布唯一和不唯一的参数区域.

无穷粒子马尔可夫过程的遍历性理论还可以应用图表示法和定向渗流方法研究. 关于这方面的发展情形可看[8],[11]，而定向渗流的发展情况可参看[8]. [26]应用有色随机图方法，对以 $\{0,1,2\}^Z$ 为态空间的一个反应扩散模型得到非遍历性的充分条件，进而结合此结果应用耦合方法得到 Z_+^2 上具线性增长和二次死亡速率的反应扩散模型的非遍历条件. 应用图表示法和定向渗流方法，[57],[58] 证明了：在 $\{1,2,\cdots,N\}$ 上的基本接触过程死亡的时间 σ_N 当 $\lambda<\lambda_c$ 时依概率 1 按 clogN 增长，而当 $\lambda>\lambda_c$ 时按 e^{cN} 增长. [59] 讨论了当 $N\to\infty$ $\lambda=\lambda_c$ 时 σ_N 的性态. 这是关于接触过程的临界现象的一个很有趣的结果.

关于粒子系统(或与它有紧密联系)的研究方向，还可以介绍以下几点：(1)渗流的数学理论. 我们向读者推荐[60]，它介绍了这一方向的某些有兴趣的重要研究课题及有关文献.(2)与统计物理的临界现象有关的概率极限理论.对于这一方向，我们向读者推荐[61]，在该文中介绍了这方面的一些未解决的基本课题，系统介绍了讨论得较好的一个具体重要模型——Dyson 的连环套模型的有关成果. (3)无穷粒子系统的动力系统问题，即对给定的哈密顿构造具有此哈密顿的随时间演化的无穷粒子系统；研究此系统的平稳分布在任一初始分布下的极限分布以及它们与 Gibbs 态的关系等等一系列问题. 关于这一方向的研究状况可参看综合文章[62],[63]，那里引述了大量的文献. (4)无穷粒子系统的 Hydrodynamic 极限，即在一定的重新标度 (rescaling) 下，研究系统的微观(概率)描述与宏观(偏微分方程)描述之间的关系. 这一方面的研究成果在近几年的概率论杂志(例如 Annals of probability, Probability theory and related fields (即以前的 ZWvG))和数

学物理杂志(例如 Communications in mathematical physics, Journal of statistic physics)上屡见不鲜.

由于粒子系统研究的多样性和丰富性,虽然已有很多的结果,但是似乎可以说还只处于初期发展阶段,一般理论并不系统,处理方法也常因模型而异,是一个正在蓬勃发展而且有重要应用前景的数学分支. 在我国是值得重视并促使它发展的. 对于有志的青年数学家来说,是一个大有用武之地的广阔研究领域.

参 考 文 献

甲. 书

[1] 王梓坤(1965),随机过程论,科学出版社,(1978 第二次印刷),北京

[2] 严士健、王隽骧、刘秀芳(1982), 概率论基础, 科学出版社(1985 第二次印刷),北京.

[3] 严加安(1981),鞅与随机积分引论,上海科学技术出版社,上海.

[4] 陈木法(1986), 跳过程与粒子系统(北京师范大学现代数学丛书之一), 北京师范大学出版社,北京.

[5] J. Dieudonne (1969), Foundations of Modern Analysis, Academic Press,(中译本: 迪厄多内(沈永欢译,1986),现代分析基础,科学出版社,北京.)

[6] T. M. Liggett (1985), Interacting Particle Systems, Springer-Verlag.

[7] K. Yosida(1978), Functional Analysis, 5th Ed., Springer-Verlag. (中译本: 吉田耕作(吴光恺等译,1981)泛函分析,人民教育出版社)

[8] R. Durrett (1988), Lecture Note in Particle Systems and Percolations, Wadsworth, Inc..

[9] R. S.Ellis (1985), Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics, Springer-Verlag.

[10] H. O. Georgii (1988), Gibbs Measures and Phase Transitions, Walter de Gruyter.

[11] D. Griffeath (1979), Additive and Cancellative Interacting Particle Systems, Lecture Notes in Math. 724, Springer-Verlag.

[12] C. Preston (1976), Random Fields, Lecture Notes in Math. 534, Spinger-Verlag,(严士健、陈木法、丁万鼎译,随机场,北京师范大学出版社,1982).

[13] Ya. G. Sinai (1982), Theory of Phase Transitions: Rigorous Results, Pergamon Press.

乙. 论文

[14] 严士健、李占柄(1980), 非平衡系统的概率模型及 Master 方程的建立, 物理学报, 29,139—152

[15] Yan Shi-Jian, Chen Mu-fa (1986), Multidimensional Q-processes, Chin. Ann. of Math., 7B, 90—110.

[16] Zheng Xiao-gu, Ding Wan-ding (1987), rxistence theorems for linear growth processes with diffusions, Acta Mathematica Scientia 7,25—42.

[17] Chen Mu-fa (1985), Infinite dimens onal reaction diffusion processes, Acta Mathematica Sinica, (New Ser.) Vol. 1 261—273.

[18] Chen Mu-fa (1986), Existence theorems for interacting particle

systems with non-compact state spaces. Science Sinica (Series A), XXIX: 11, 31—39.

[19] 唐守正(1985)，扩散速度有限的多物种反应扩散过程的存在性及唯一性、应用概率统计，第1卷，11—22.

[20] 郑君礼、郑小谷(1986)，Q过程的鞅方法，科学通报，1986年第17期.

[21] 李俊平(1988)，多物种反应扩散过程，北京师范大学硕士学位论文.

[22] 韩东(1988)，多物种无穷维反应扩散粒子系统鞅解的存在性，待发表.

[23] 韩东(1988)，多物种无穷维反应扩散粒子系统鞅解的唯一性，待发表.

[24] Feng Shui (冯水), Zheng Xiao-gu(郑小谷) (1988), Solutions of a class of nonlinear Master equations. Technical Report 115, Carleton University, Ottawa.

[25] T. Funaki (1984), A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. ZWvG 67, 331—348.

[26] 李勇(1988)，无穷维反应扩散过程的若干结果. 北京师范大学硕士学位论文.

[27] 侯振挺、陈木法(1980)，马尔可夫过程与场论. 科学通报，1980年第20期，913—916.

[28] 丁万鼎、陈木法(1981)，紧邻速度函数的拟可逆测度. 数学年刊，Vol. 2, 47—59.

[29] 唐守正(1982)，自旋变相过程的可逆性. 数学学报，25，308—314.

[30] Yan Shi-Jian, Chen Mu-fa, Ding Wan-ding(1982), Potentiality and reversibility for general speed functions, Chinese Ann. Math.,(I) Vol. 3, 572—586; (II) Vol. 3, 705—720.

[31] 曾文曲(1983)，两类无穷质点马氏过程的可逆性. 数学年刊，4A, 763—772

[32] 李世取(1983)，混合型无穷质点马氏过程的有势性和可逆性，数学年刊，4A, 773—780.

[33] Ren Kai-long(任开隆)(1983), Potentiality and reversibility for the N-spin-flip processes and the N-generalized spin-flip processes, Acta Math. Sci (China), 3, 300—320.

[34] 戴永隆(1986)，Gibbs 态与可逆随机场，数学学报，29，103—111.

[35] 吴先伟(1986)，典型 Gibbs 态与可逆随机场，待发表.

[36] Yan Shi-Jian(1988), A remark on reversible particle system, 17 th Conference on Stochastic Proc.Appl., Roma.

[37] Yan Shi-Jion (1988), Reversib lity of interacting particle systems, Technical Report 117, Carleton University, Ottawa.

[38] T. M. Liggett, (1977), The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. Lecture Notes in Math., 598,188—248, Springer-Verlag.

[39] 栾长福(1988)，几类粒子系统临界现象的研究，中山大学博士学位论文.

[40] 郑小谷(1981)，广义自旋变相过程存在定理的一个注记. 北京师范大学学报(自然科学版)，1981年第二期，45—58.

[41] 唐守正、刘秀芳，自旋变相过程的多元耦合，北京师范大学学报(自然科学版)，1980年第三一四期.

[42] Chen Mu-fa (陈木法)(1986), On coupling of jump processes

[43] Chen Mu-Fa (陈木法), Li Shao-Fu (李少辅) (1989), Coupling methods for multidimensional diffusion processes. Ann. Prob. to appear.

[44] R. Durrett (1981), An introduction to infinite particle systems. Stochastic process. appl., 11, 109—150.

[45] 戴永隆、刘锡坚(1985)，一维自旋系统(有限系统). 应用概率统计，第一卷，31—42.

[46] Dai Yong-long(戴永隆)、Liu Xi-jian(刘锡坚)(1986), Quasi-nearest particle systems, Acta Mathematica Sinica, (New Ser.) Vol. 2.

[47] 刘锡坚(1987)，有限拟近邻质点系统. 应用概率统计，3，38—45.

[48] 曾文曲、郑小谷(1982)，关于无穷质点马尔可夫过程的几点注记. 东北工学院学报，1982第4期.

[49] Zheng Xiao-gu(郑小谷)、Zong Wen-qu (曾文曲)(1987), An ergodiic theorem for generalized simple exclusion processes with reversible positive transition. Acta Mathematica Scientia, 7, 169—175.

[50] Zheng Xiao-gu (郑小谷) (1988), Ergodic theorem for generalized long-range exclusion processes with positive recurrent transition probabilities. Acta Math. Sinica, (New Ser.). Vol. 4, 193—209

[51] Chen Jin-wen(陈金文)、Richard eurrett、Liu Xiu-fang(刘秀芳) (1989), The exponential convergence for one dimensional cantact processes. Acta Math. Sinica (New Ser.) to appear.

[52] 黄力平(1987)，一类无穷质点马尔可夫过程的平稳分布存在性. 应用概率统计3，152—158.

[53] Ding Wan-ding(丁万鼎)、Zheng Xiao-gu (郑小谷)Ergodic theorems for linear growth processes with diffusion, to appear.

[54] 郑小谷(1985)，两类无穷质点系统. 北京师范大学博士学位论文.

[55] 唐守正(1985)，离散无穷粒子系统中的某些问题. 北京师范大学博士学位论文.

[56] Ding Wan-ding(丁万鼎), R. Durrett, T. M. Liggett (1988), Ergodicity of reversible reaction diffusion processes. Technical Report 88—126, MSI. Cornell University.

[57] R. Durrett, Liu Xiu-fang(刘秀芳)(1988), The contact process on a finite set. Ann. Prob. Vol. 16, 1158—1173.

[58] R. Durrett, R. H. Schonmann (1988), The contact process on a finite set II. Ann. Prob., to appear.

[59] R. Durrett, R. H. Schonmann, N. I. Tanaka, (1988) The contati processes on a finite set. Technical Report 88—40, MSI.Cornell University

[60] H. Kesten(1987), Percolation thery and first passage Percolation

Ann. Prob. 15, 1231—1271.

[61] P. M. Bleher, P. Major (1987), Critical phenomena and universal exponents in statistical physics. On Dyson's hierarchical model. Ann. Prob. 15, 431—477.

[62] R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai(1980), Mathematical problems in statistical mechanics. Mathematical Physics Reviews, Vol 1, 55—106. Harwood Academic Publishers.

[63] R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai, Y. M. Suhov (1985), Dynamical systems in statistical mechanics. Chapter 10 from Dynamical System, Vol II, (Edited by Sinai), Encyclopaedia of Mathematic Sciences (Translated from Russian), Springer-Verlag, 1989.

符 号 索 引

*) 此处§0,2 表示导言的第 2 目

**) 此处§1.1,1 表示第一章§1 的第 1 目

名 词 索 引

*) 此处 §1.2,13 表示第一章§2的第13目

**) 此处 §0,3 表示导言的第 3 目

13 画

15 画

其 它